МАТЕРИАЛЫ ЗАДАНИЙ
Всероссийской междисциплинарной олимпиады
школьников 8–11 класса
«Национальная технологическая олимпиада»

по профилю
«Квантовый инжиниринг»

2024/25 учебный год

ntcontest.ru

УДК 373.5.016:62
ББК 74.263.0
К32

Авторы:
А. А. Волков, О. В. Зубков, А. А. Керов, К. Д. Кириченко, Н. Ю. Кузнецов, К. С. Лукьянов, Я. С. Ляхова

К32 Всероссийская междисциплинарная олимпиада школьников 8–11 класса «Национальная технологическая олимпиада». Учебно-методическое пособие
Том 25 **Квантовый инжиниринг**
— М.: Ассоциация участников технологических кружков, 2025. — 177 с.

ISBN 978-5-908021-24-1

Данное пособие разработано коллективом авторов на основе опыта проведения всероссийской междисциплинарной олимпиады школьников 8–11 класса «Национальная технологическая олимпиада» в 2024/25 учебном году, а также многолетнего опыта проведения инженерных соревнований для школьников. В пособии собраны основные материалы, необходимые как для подготовки к олимпиаде, так и для углубления знаний и приобретения навыков решения инженерных задач.

В издании приведены варианты заданий по профилю Национальной технологической олимпиады за 2024/25 учебный год с ответами, подробными решениями и комментариями. Пособие адресовано учащимся 8–11 классов, абитуриентам, школьным учителям, наставникам и преподавателям учреждений дополнительного образования, центров молодежного и инновационного творчества и детских технопарков.

Методические материалы также могут быть полезны студентам и преподавателям направлений, относящихся к группам:
01.00.00 Математика и механика
03.00.00 Физика и астрономия
12.00.00 Фотоника, приборостроение оптические и биотехнические системы и технологии
16.00.00 Физико-технические науки и технологии

ISBN 978-5-908021-24-1

9 785908 021241 >

УДК 373.5.016:62
ББК 74.263.0

Оглавление

1. Введение

1.1. Национальная технологическая олимпиада

Всероссийская междисциплинарная олимпиада школьников 8–11 класса «Национальная технологическая олимпиада» (далее — Олимпиада, НТО) проводится в соответствии с распоряжением Правительства Российской Федерации от 10.02.2022 № 211-р при координации Министерства науки и высшего образования Российской Федерации и при содействии Министерства просвещения Российской Федерации, Министерства цифрового развития, связи и массовых коммуникаций Российской Федерации, Министерства промышленности и торговли Российской Федерации, Ассоциации участников технологических кружков, Агентства стратегических инициатив по продвижению новых проектов, АНО «Россия — страна возможностей», АНО «Платформа Национальной технологической инициативы» и Российского движения детей и молодежи «Движение Первых».

Проектное управление Олимпиадой осуществляет структурное подразделение Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» — Центр Национальной технологической олимпиады. Организационный комитет по подготовке и проведению Национальной технологической олимпиады возглавляют первый заместитель Руководителя Администрации Президента Российской Федерации С. В. Кириенко и заместитель Председателя Правительства Российской Федерации Д. Н. Чернышенко.

Национальная технологическая олимпиада — это командная инженерная Олимпиада, позволяющая школьникам работать в самых передовых инженерных направлениях. Она базируется на опыте Олимпиады Кружкового движения НТИ и проводится с 2015 года, а с 2016 года входит в перечень Российского совета олимпиад школьников и дает победителям и призерам льготы при поступлении в университеты.

Всего заявки на участие в десятом юбилейном сезоне (2024–25 гг.) самых масштабных в России командных инженерных соревнованиях подали более 140 тысяч школьников. Общий охват олимпиады с 2015 года превысил 880 тысяч участников.

НТО способствует формированию профессиональной траектории школьников, увлеченных научно-техническим творчеством и помогает им:

- определить свой интерес в мире современных технологий;
- получить опыт решения комплексных инженерных задач;
- осознанно выбрать вуз для продолжения обучения и поступить в него на льготных условиях.

Кроме того, НТО позволяет каждому участнику познакомиться с перспективными направлениями технологического развития, ведущими экспертами и найти единомышленников.

Ценности НТО

Национальная технологическая олимпиада — командные инженерные соревнования для школьников и студентов. Олимпиада создает уникальное пространство, основанное на общих ценностях и смыслах, которыми делятся все участники процесса: школьники, студенты, организаторы, наставники и эксперты. В основе Олимпиады лежит представление о современном технологическом образовании как новом укладе жизни в быстро меняющемся мире. Эта модель предполагает:

- доступность качественного обучения для всех, кто стремится к знаниям;
- возможность непрерывного развития;
- совместное формирование среды, где гуманитарные знания и новые технологии взаимно усиливают друг друга.

Это — образ общества будущего, в котором участники Олимпиады оказываются уже сегодня.

Решать прикладные задачи, нацеленные на умножение общественного блага

В заданиях Олимпиады используются актуальные вызовы науки и технологий, адаптированные под уровень школьников. Они имеют прикладной характер и отражают реальные потребности общества, а системное и профессиональное решение подобных задач способствует развитию общего блага. Олимпиада предоставляет возможность попробовать себя в этом направлении уже сегодня и найти единомышленников.

Создавать, а не только потреблять

Стремление к созданию нового ценится выше потребления готового, а ориентация на общественную пользу — выше личной выгоды. Это не исключает заботу о собственных интересах, но подчеркивает: творчество приносит больше удовлетворения, чем пассивное потребление. Олимпиада — совместный труд организаторов, партнеров и участников, в котором важнее стремление решать общие задачи, чем критика чужих усилий.

Работать в команде

Командная работа рассматривается не только как эффективный способ достижения целей, но и как основа для формирования сообщества, объединенного общими ценностями. Команда помогает раскрыть индивидуальность каждого, при этом сохраняя уважение к другим. Такие горизонтальные связи необходимы для реализации амбициозных технологических проектов. Олимпиада способствует формированию подобного сообщества и приглашает к его созданию всех заинтересованных.

Осваивать и ответственно развивать новые технологии

Сообщество Национальной технологической олимпиады — часть Кружкового движения НТИ, объединенные интересом к современным технологиям, стремлением к их пониманию и созданию нового. Возможности технологий постоянно расширяются, однако развитие должно сопровождаться ответственностью. Этика инженера и ученого предполагает осознание последствий своих решений. Главное правило — создавая новое, не навредить.

Играть честно и пробовать себя

Ценится честная победа, достигнутая в рамках установленных правил. Это предполагает отказ от списывания, давления и манипуляций. Честная игра означает уважение к себе, команде и соперникам. Олимпиада поддерживается как безопасное пространство, где каждый может пробовать новое, не опасаясь ошибок, и постепенно становиться сильнее и увереннее в себе.

Быть человеком

Соревнования — это сложный и эмоционально насыщенный процесс, в котором особенно важны порядочность, вежливость и чуткость. Эмпатия, уважение и забота делают участие полезным и комфортным. Высоко ценится бережное отношение к людям и их труду, отказ от токсичной критики и готовность нести ответственность за слова и поступки. Участие в общем деле помогает не только окружающим, но и самому человеку.

Организационная структура НТО

НТО — межпредметная олимпиада. Спектр соревновательных направлений (профилей НТО) сформирован на основе актуального технологического пакета и связан с решением современных проблем в различных технологических отраслях. С полным перечнем направлений (профилей) можно ознакомиться на сайте НТО: https://ntcontest.ru/tracks/nto-school/.

Соревнования в рамках НТО проводятся по четырем трекам:

1. НТО Junior для школьников (5–7 классы).
2. НТО школьников (8–11 классы).
3. НТО студентов.
4. Конкурс цифровых портфолио «Талант НТО».

В 2024/25 учебном году 21 профиль НТО включен в Перечень олимпиад школьников, ежегодно утверждаемый Приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, а также в Перечень олимпиад и иных интеллектуальных и (или) творческих конкурсов, утверждаемый приказом Министерства просвещения Российской Федерации. Это дает право победителям и призерам профилей НТО поступать в вузы страны без вступительных испытаний (БВИ), получить 100 баллов ЕГЭ или дополнительные 10 баллов за индивидуальные достижения. Преимущества при поступлении победителям и призерам НТО предлагают более 100 российских вузов.

НТО для школьников 8–11 классов проводится в три этапа:

- Первый отборочный этап — заочный индивидуальный. Участникам предлагаются предметный тур, состоящий из задач по двум предметам, связанным с выбранным профилем, а также инженерный тур, задания которого погружают участников в тематику профиля; образовательный модуль формирует теоретические знания и представления.

- Второй отборочный этап — заочный командный. На этом этапе участники выполняют как индивидуальные задания на проверку компетенций, так и командные задачи, соответствующие выбранному профилю.
- Заключительный этап — очный командный. В течение 5–6 дней команды участников со всей страны, успешно прошедшие оба отборочных этапа, соревнуются в решении комплексных прикладных инженерных задач.

Профили НТО 2024/25 учебного года и соответствующий уровень РСОШ

Профили II уровня РСОШ:

- Автоматизация бизнес-процессов.
- Автономные транспортные системы.
- Беспилотные авиационные системы.
- Водные робототехнические системы.
- Инженерные биологические системы.
- Наносистемы и наноинженерия.
- Нейротехнологии и когнитивные науки.
- Технологии беспроводной связи.
- Цифровые технологии в архитектуре.
- Ядерные технологии.

Профили III уровня РСОШ:

- Анализ космических снимков и геопространственных данных.
- Аэрокосмические системы.
- Большие данные и машинное обучение.
- Геномное редактирование.
- Интеллектуальные робототехнические системы.
- Интеллектуальные энергетические системы.
- Информационная безопасность.
- Искусственный интеллект.
- Летающая робототехника.
- Спутниковые системы.
- Кластер «Виртуальные миры»:
    - ◇ Разработка компьютерных игр.
    - ◇ Технологии виртуальной реальности.
    - ◇ Технологии дополненной реальности.

Профили без уровня РСОШ:

- Инфохимия.
- Квантовый инжиниринг.
- Новые материалы.
- Программная инженерия в финансовых технологиях.

- Современная пищевая инженерия.
- Умный город.
- Урбанистика.
- Цифровые сенсорные системы.
- Разработка мобильных приложений.

Обратите внимание на то, что в олимпиаде 2025/26 учебного года список профилей, в т. ч. входящих в РСОШ, и уровни РСОШ могут поменяться.

Участие в НТО старшеклассников может принять любой школьник, обучающийся в 8–11 классе. Чаще всего Олимпиада привлекает:

- учащихся технологических кружков, интересующихся инженерными и робототехническими соревнованиями;
- школьников, увлеченных олимпиадами и предпочитающих межпредметный подход;
- энтузиастов передовых технологий;
- активных участников хакатонов, проектных конкурсов и профильных школ;
- будущих предпринимателей, ищущих команду для реализации стартап-идей;
- любознательных школьников, стремящихся выйти за рамки школьной программы.

Познакомить школьников с НТО и ее направлениями, а также мотивировать их на участие в Олимпиаде можно с помощью специальных мероприятий — Урока НТО и Дней НТО. Методические рекомендации для педагогов по проведению Урока НТО и организации Дня НТО в образовательной организации размещены на сайте: https://nti-lesson.ru. Здесь можно подобрать и скачать готовые сценарии занятий и подборки материалов по различным направлениям Олимпиады.

Участвуя в НТО, школьники получают возможность работать с практико-ориентированными задачами в области прорывных технологий, собирать команды единомышленников, погружаться в профессиональное сообщество, а также заработать льготы для поступления в вузы.

По всей стране работают площадки подготовки к НТО, которые помогают привлекать участников и проводят мероприятия по подготовке к этапам Олимпиады. Такие площадки могут быть открыты на базе:

- школ и учреждений дополнительного образования;
- частных кружков по программированию, робототехнике и другим технологическим направлениям;
- вузов;
- технопарков и других образовательных и научно-технических организаций.

Любое образовательное учреждение, ученики которого участвуют в НТО или НТО Junior, может стать площадкой подготовки к Олимпиаде и присоединиться к Кружковому движению НТИ. Подробные инструкции о том, как стать площадкой подготовки, размещены на сайте: https://ntcontest.ru. Условия регистрации и требования к ним актуализируются с развитием Олимпиады, а обновленная информация публикуется перед началом каждого нового цикла.

Наставники НТО

В Национальной технологической олимпиаде большое внимание уделяется работе с **наставниками** — людьми, сопровождающими участников на всех этапах подготовки и участия в Олимпиаде. Наставник оказывает поддержку как в решении организационных вопросов, так и в развитии технических и социальных навыков школьников, включая умение работать в команде.

Наставником НТО может стать любой взрослый, готовый помогать школьникам развиваться и готовиться к участию в инженерных соревнованиях. Это может быть:

- учитель школы или преподаватель вуза;
- педагог дополнительного образования;
- руководитель кружка;
- родитель школьника;
- специалист из технологической области или представитель бизнеса.

Даже если наставник сам не обладает достаточными знаниями в определенной области, он может привлекать к подготовке коллег и экспертов, а также оказывать поддержку и организовывать процесс обучения для самостоятельных учеников. Сегодня сообщество наставников НТО насчитывает более **7 000 человек** по всей стране.

Главная цель наставника — **организовать системную подготовку к Олимпиаде в течение всего учебного года**, поддерживать интерес и мотивацию участников, а также помочь им справляться с возникающими трудностями. Также наставник фиксирует цели команды и каждого участника, чтобы в дальнейшем можно было проанализировать развитие профессиональных и личных компетенций.

Основные направления работы наставника

Организационные задачи:

- Информирование и мотивация: наставник рассказывает учащимся об НТО, ее этапах и преимуществах, помогает с выбором подходящего профиля, ориентируясь на интересы и способности школьников.
- Составление программы подготовки: формируется расписание и план занятий, организуется работа по освоению необходимых знаний и навыков.
- Контроль сроков: наставник следит за календарем Олимпиады и напоминает участникам о сроках решения заданий отборочных этапов.

Содержательная подготовка:

- Оценка компетенций участников: наставник помогает определить сильные и слабые стороны учеников и подбирает задания и материалы для устранения пробелов.
- Подготовка к отборочным этапам: помощь в изучении рекомендованных материалов, заданий прошлых лет, онлайн-курсы по профилям.
- Подготовка к заключительному этапу: разбираются задачи заключительных этапов прошлых лет, отслеживаются подготовительные мероприятия (очные и дистанционные), в которых наставник рекомендует ученикам участвовать.

Развитие личных и командных навыков:

- Формирование команд: наставник помогает сформировать сбалансированные команды для второго отборочного и финального этапов, распределить роли, при необходимости ищет участников из других регионов и организует онлайн-коммуникацию.
- Анализ прогресса и опыта: после каждого этапа проводится совместная рефлексия, обсуждаются успехи и трудности, выявляются зоны роста и направления для дальнейшего развития.
- Поддержка и мотивация: наставник поддерживает интерес и энтузиазм участников (особенно в случае неудачных результатов), помогает справиться с разочарованием и сохранить настрой на дальнейшее участие.
- Построение индивидуальной образовательной траектории: наставник помогает школьникам осознанно планировать дальнейшее обучение: выбирать курсы, участвовать в конкурсах, определяться с вузами и направлениями подготовки.

Поддержка наставников НТО

Работе наставников посвящен отдельный раздел на сайте НТО: https://ntcontest.ru/mentors/.

Для систематизации знаний и подходов к работе наставников в рамках инженерных соревнований разработан курс «Дао начинающего наставника: как сопровождать инженерные команды»: https://stepik.org/course/124633/. Курс формирует общие представления об их работе в области подготовки участников к инженерным соревнованиям.

Для совершенствования профессиональных компетенций по направлениям профилей создан курс «Дао начинающего наставника: как развивать технологические компетенции»: https://stepik.org/course/186928/.

Для организации занятий с учениками педагогам предлагаются образовательные программы, разработанные на основе многолетнего опыта организации подготовки к НТО. В настоящий момент они представлены по передовым технологическим направлениям:

- компьютерное зрение;
- геномное редактирование;
- водная, летающая и интеллектуальная робототехника;
- машинное обучение и искусственный интеллект;
- нейротехнологии;
- беспроводная связь, дополненная реальность.

Программы доступны на сайте: https://ntcontest.ru/mentors/education-programs/.

Регистрируясь на платформе НТО, наставники получают доступ к личному кабинету, в котором отображается расписание отборочных соревнований и мероприятий по подготовке, требования к знаниям и компетенциям при решении задач отборочных этапов.

Сообщество наставников НТО существует и развивается. Ежегодно Кружковое движение НТИ проводит Всероссийский конкурс технологических кружков: https://konkurs.kruzhok.org/. Принять участие в конкурсе может каждый наставник.

В 2022 году было выпущено пособие «Технологическая подготовка инженерных команд. Методические рекомендации для наставников». Методические рекомендации предназначены для учителей технологий, а также наставников и педагогов кружков и центров дополнительного образования. Рекомендации направлены на помощь в процессе преподавания технологий в школе или в кружке. Пособие построено на примерах из реального опыта работы со школьниками, состоит из теоретических положений, посвященных популярным взглядам в педагогике на тему подготовки инженерных команд к соревнованиям. Электронное издание доступно по ссылке: https://journal.kruzhok.org/tpost/pggs3bp7y1-tehnologicheskaya-podgotovka-inzhenernih.

В нем рассмотрены особенности подготовки к пяти направлениям:

- Большие данные.
- Машинное обучение.
- Искусственный интеллект.
- Спутниковые системы.
- Летающая робототехника.

Для наставников НТО разработана и постоянно пополняется страница с материалами для профессионального развития: https://nto-forever.notion.site/c9b9cbd21542479b97a3fa562d15e32a.

1.2. Квантовый инжиниринг

Профиль НТО Квантовый инжиниринг знакомит участников с научно-технологическим направлением, цель которого в преобразовании результатов поисковых исследований в области квантовых технологий в конечный продукт.

Сфера квантовых исследований находится на стадии бурного развития: вместе с постепенным пониманием общества потенциала квантовых технологий формируется все более активный запрос на готовые устройства со стороны конечных пользователей. В эту отрасль приходят крупные инвестиции, составляются дорожные карты ее развития на государственном уровне. При этом основной вес квантовых технологий все еще приходится на научные исследования. Для дальнейшего развития квантовой отрасли необходимы уникальные специалисты — квантовые инженеры, сочетающие компетенции исследователей и инженеров.

Технологическая задача, которую решают участники профиля на заключительном этапе, представляет собой наглядный пример того, с какими вызовами приходится сталкиваться квантовым инженерам.

Каждая команда финалистов — это коллектив квантовых инженеров. Она получает «заказ» на создание квантового устройства, которое отвечает заданным техническим характеристикам (техническому заданию). Участникам необходимо:

1. разобраться с техническим заданием;
2. разработать и просчитать схему будущего устройства;
3. собрать и наладить установку;
4. снять показания измерительных приборов;
5. обработать полученные результаты, избавившись от шумов и получив физически осмысленные данные;
6. составить подробный отчет, продемонстрировав глубокое понимание всех этапов работы;
7. презентовать свой проект «заказчику», кратко и ярко представив готовый результат.

Поскольку квантовый инжиниринг — новая сфера деятельности, обязательной частью работы профиля является широкое вовлечение школьников в эту область. Эта задача решается с помощью «Урока НТО», а также через популяризацию профиля в социальных сетях.

Зарегистрировавшиеся на профиль школьники получают доступ к специально созданному для НТО образовательному курсу на платформе Stepik. Он включает серию коротких видеоуроков с заданиями для самостоятельного решения, которые знакомят школьников с базовыми понятиями и принципами квантовой физики — основой квантовых технологий.

Параллельно с инженерным туром участники решают задачи предметных туров по физике и информатике — дисциплинам, необходимым для осмысления и решения физической задачи и обработке «сырых» экспериментальных данных.

На втором отборочном этапе участники переходят к расчетам элементной базы, из которой строятся квантовые устройства. Так, в случае, когда задача финала выполняется на открытой оптике, им предлагается:

- научиться проводить расчеты для оптических схем из зеркал и светоделителей, источников лазерного излучения;
- рассчитывать необходимую аттенюацию излучения;
- учитывать неидеальности детекторов фотонов;
- обрабатывать зашумленные данные с осциллограмм и в ходе анализа извлекать из них физически осмысленную информацию.

Образовательная траектория продолжается на заключительном этапе в виде мастер-классов по работе с научно-технологическим оборудованием, которое предоставляется участникам для решения задачи. Поскольку лазерное излучение является источником повышенной опасности, особое внимание уделяется обучению правилам техники безопасности и грамотному обращению с оборудованием.

Полученные на мастер-классах и предыдущих этапах Олимпиады знания и навыки участники применяют для создания собственного квантового устройства «с нуля». Перед тем как приступить к выполнению командной инженерной задач, финалисты освежают необходимые знания в области физики и информатики, выполняя задания индивидуальных предметных туров.

Профиль соответствует дорожной карте развития в России сквозной цифровой технологии «Квантовые технологии» и способствует расширению кадрового потенциала в этой отрасли. Участие в Олимпиаде, в том числе через профориентационные мероприятия от партнеров, формирует у школьников целостное представление о профессии будущего — квантовом инженере.

Специализация в этой сфере и смежных областях, таких как лазерная физика и фотоника, — это гарантия востребованности на рынке труда, приобретения интересной и нужной работы. Победители и призеры получают дополнительные льготы при поступлении в НИЯУ МИФИ, в частности, на программу бакалавриата «Квантовый инжиниринг» (направление 03.03.01 Прикладные математика и физика).

2. Первый отборочный этап

2.1. Работа наставника НТО на этапе

Педагог-наставник играет важную роль в подготовке участника к первому отборочному этапу Национальной технологической олимпиады. На этом этапе школьникам предстоит справиться как с предметными задачами, соответствующими профилю, так и с заданиями инженерного тура, погружающими в выбранную технологическую область.

Наставник может организовать подготовку участника, используя разнообразные форматы и ресурсы:

- Разбор заданий прошлых лет. Совместный анализ задач отборочного этапа предыдущих лет позволяет понять структуру, уровень сложности и типичные подходы к решению. Это формирует у школьника устойчивые стратегии работы с олимпиадными заданиями.
- Мини-соревнования. Проведение тренировочных турниров с заданиями предметных олимпиад муниципального уровня помогает развить соревновательный навык, тренирует скорость и уверенность при решении задач в ограниченное время.
- Углубленные занятия. Наставник может выстроить образовательную траекторию, опираясь на рекомендации разработчиков профиля, и провести занятия по ключевым темам. Это особенно важно для системного понимания предметной области.
- Использование онлайн-курсов. Для самостоятельной подготовки и проверки знаний участник может использовать предметные курсы НТО, размещенные на платформах Степик и Яндекс Контест. Наставник может также организовать занятия с использованием этих материалов в рамках групповой или индивидуальной подготовки.
- Привлечение внешних экспертов. Если у наставника нет достаточной экспертизы в какой-либо предметной области, он может пригласить других педагогов или специалистов для проведения тематических занятий.
- Поддержка в инженерном туре. Инженерный тур включает теоретические материалы и задания, помогающие глубже погрузиться в тематику профиля. Наставник может сопровождать изучение курса, помогать в разборе теоретических вопросов и тренировать участника на практических задачах.

Таким образом, наставник не только помогает систематизировать подготовку, но и мотивирует участника, создавая для него комфортную и продуктивную образовательную среду.

2.2. Предметный тур. Информатика

2.2.1. Первая волна. Задачи 8–11 класса

Задачи первой волны предметного тура по информатике открыты для решения. Соревнование доступно на платформе Яндекс.Контест: https://contest.yandex.ru/contest/63452/enter/.

Задача 2.2.1.1. Ускорение ускорения (10 баллов)

Имя входного файла: стандартный ввод или `input.txt`.

Имя выходного файла: стандартный вывод или `output.txt`.

Ограничение по времени выполнения программы: 1 с.

Ограничение по памяти: 64 Мбайт.

Условие

Рассмотрим модель движения тела. Будем фиксировать такие параметры, как координата, скорость, ускорение и ускорение ускорения (рывок). Если некоторый параметр равен a и имеет скорость изменения v, то в следующий момент времени этот параметр будет равен $a + v$.

Например, если тело имело координату, равную 10, скорость, равную 20, ускорение, равное 30 и ускорение ускорения, равное 40, то в следующий момент оно будет иметь координату 30, скорость 50 и ускорение 70. Ускорение ускорения будем считать в этой задаче постоянной величиной.

Задача довольно проста: тело в начальный момент времени 0 находится в точке с координатой 0, скоростью 0 и ускорением 0. На это тело действует постоянное ускорение ускорения, равное 6. Требуется определить, в точке с какой координатой окажется это тело в момент времени t.

Формат входных данных

В единственной строке находится одно число t, где $0 \leqslant t \leqslant 10^6$.

Формат выходных данных

Вывести одно число — координату, в которой окажется тело в момент времени t.

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод
6

Стандартный вывод
120

Пример №2

Стандартный ввод
2

Стандартный вывод
0

Пример №3

Стандартный ввод
1000000

Стандартный вывод
999997000002000000

Решение

Ниже представлено решение на языке C++.

C++

```cpp
#include<bits/stdc++.h>
#define int long long
using namespace std;
signed main(){
    int t;
    cin >> t;
    cout << ((t * (t - 1)) * (t - 2)) << endl;
}
```

Задача 2.2.1.2. Двойное остекление (15 баллов)

Имя входного файла: стандартный ввод или `input.txt`.

Имя выходного файла: стандартный вывод или `output.txt`.

Ограничение по времени выполнения программы: 1 с.

Ограничение по памяти: 64 Мбайт.

Условие

У деда Василия есть два прямоугольных куска стекла. Один из них имеет размеры $a \times b$, другой — $c \times d$. Дед собирается из этих кусков сделать окно с двойным остеклением. Он хочет, чтобы окно было обязательно квадратным и как можно большим по размеру. Дед должен вырезать из имеющихся у него прямоугольников два одинаковых квадрата максимально возможного размера. Нужно написать программу, которая по заданным a, b, c, d найдет максимальные размеры квадратного окна. Имейте ввиду, что оба квадрата могут быть вырезаны и из одного прямоугольного куска стекла.

Формат входных данных

На вход подаются две строки. В первой строке находятся размеры первого прямоугольника a, b через пробел, во второй — размеры второго прямоугольника c, d через пробел, где $1 \leqslant a, b, c, d \leqslant 10^9$.

Формат выходных данных

Вывести одно число — максимальную сторону квадратного двойного окна, которое можно вырезать из заданных на входе прямоугольных кусков стекла. Ответ может быть нецелым, требуется вывести его с точностью 1 знак после десятичной точки.

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод
5 10 9 6

Стандартный вывод
5

Пример №2

Стандартный ввод
4 10 9 6

Стандартный вывод
4.5

Комментарий

Второй пример показывает, что иногда лучше вырезать оба квадрата из одного и того же куска стекла.

Решение

Ниже представлено решение на языке C++.

C++

```cpp
#include<bits/stdc++.h>
#define int long long
using namespace std;
signed main(){
    double a, b, c, d;
    cin >> a >> b >> c >> d;
    double a0 = min({a, b, c, d});
    double a1 = min(max(a, b) / 2.0, min(a, b));
    double a2 = min(max(c, d) / 2.0, min(c, d));
    double ans =  max({a0, a1, a2});
    if( (int)ans == ans ){
        int ians = ans;
        cout << ians << endl;
        return 0;
    }
    cout.precision(1);
    cout << fixed<< ans << endl;
}
```

Задача 2.2.1.3. О золотой рыбке и... досках (20 баллов)

Имя входного файла: стандартный ввод или `input.txt`.

Имя выходного файла: стандартный вывод или `output.txt`.

Ограничение по времени выполнения программы: 1 с.

Ограничение по памяти: 64 Мбайт.

Условие

После событий известной сказки А. С. Пушкина старик решил принципиально не пользоваться услугами золотой рыбки. Поэтому для того чтобы изготовить новое корыто, он честно заготовил n одинаковых досок.

Но гостивший в это время у старика со старухой внук решил, что ему нужно научиться пилить. И, не сказав ничего своему деду, внук быстро распилил каждую из досок на две части. В итоге у старика оказались $2n$ кусков досок. Самое интересное, что все эти куски оказались разными по длине, но имели целочисленные размеры. К сожалению, старик забыл, какова была исходная длина целых досок.

Формат входных данных

В первой строке задается целое число n — исходное количество целых досок, где $1 \leqslant n \leqslant 10^5$.

Во второй строке заданы $2n$ целых чисел d_i — длины всех кусков, которые получились после «тренировки» внука, где $1 \leqslant d_i \leqslant 10^9$. Гарантируется, что эти числа попарно различны, и их можно разбить на пары одинаковых по сумме чисел.

Все эти части досок пронумерованы от 1 до $2n$ в том порядке, в котором они заданы на входе.

Формат выходных данных

В первую строку вывести одно число — исходную длину целых досок.

В следующих n строках вывести пары номеров кусков досок, которые составляют по длине целые доски. Номера выводить через один пробел, внутри пары сначала должен идти меньший номер, затем больший. Пары должны быть выведены в порядке возрастания первых номеров в парах.

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод
3 4 8 2 3 6 7

Стандартный вывод
10 1 5 2 3 4 6

Комментарий

Отсортируем куски и далее будем брать один из начала и второй к нему из конца.

Решение

Ниже представлено решение на языке C++.

C++

```cpp
#include<bits/stdc++.h>
#define int long long
using namespace std;
signed main(){
    int n;
    cin >> n;
    vector<pair<int, int> > v(2 * n);
     for(int i = 0; i < 2 * n; i++){
        int d;
        cin >> d;
        v[i] = {d, i + 1};
    }
    sort(v.begin(), v.end());
    vector<pair<int, int> > ans(n);
    for(int i = 0; i < n; i++){
```

```
            ans[i] = {v[i].second, v[2 * n - i - 1].second};
            if(ans[i].first > ans[i].second){
                swap(ans[i].first, ans[i].second);
            }
        }
        sort(ans.begin(), ans.end());
        cout << v[0].first + v.back().first<< endl;
        for(int i = 0; i < n; i++){
            cout << ans[i].first<<' '<< ans[i].second<< endl;
        }
    }
```

Задача 2.2.1.4. Бонусы и экономия (25 баллов)

Имя входного файла: стандартный ввод или `input.txt`.

Имя выходного файла: стандартный вывод или `output.txt`.

Ограничение по времени выполнения программы: 1 с.

Ограничение по памяти: 64 Мбайт.

Условие

Технология производства некоторой металлической детали предполагает вытачивание ее из металлической заготовки. При этом образуются стружки, которые не стоит выкидывать. Ведь из a комплектов стружек (оставшихся после обработки a заготовок) можно бесплатно выплавить еще одну заготовку, которую снова можно использовать для выточки детали и создания еще одного комплекта стружек.

Заготовки можно купить на оптовом складе, при этом в целях привлечения клиентов, проводится акция «купи b заготовок, тогда еще одну получишь бесплатно».

Требуется изготовить c деталей. Нужно определить минимальное число заготовок, которые нужно купить за деньги, чтобы с учетом бонусных заготовок и экономии на стружках можно было изготовить требуемое число деталей.

Формат входных данных

В одной строке через пробел заданы три целых числа a, b, и c такие, что $2 \leqslant a \leqslant 10^{18}$, $1 \leqslant b, c \leqslant 10^{18}$.

Формат выходных данных

Вывести одно целое число — минимальное количество заготовок, которые нужно купить, чтобы с учетом всех бонусов и экономии выточить c конечных деталей.

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод
4 5 41

Стандартный вывод
26

Примечания

В примере из условия нужно закупить 26 заготовок. Тогда за каждые пять купленных заготовок будет предоставлена одна бесплатная, итого по акции добавится еще пять заготовок, то есть получится 31 заготовка. Далее из 31 заготовки выточится 31 деталь, останется 31 комплект стружек. Из каждых четырех комплектов выплавится дополнительная заготовка, получится семь заготовок и три комплекта стружек. Из семи заготовок выточится семь деталей и останется семь комплектов стружек, три комплекта стружек осталось с первого шага, итого 10 комплектов стружек. Из них выплавится еще две заготовки, дающие две детали и два комплекта стружек. Собрав эти два комплекта с двумя, оставшимися от 10, получим еще одну заготовку, из которой выточится еще одна деталь. Останется один комплект стружек, который уже никак не получится использовать. Итого будет произведена $31 + 7 + 2 + 1 = 41$ деталь.

Комментарий

Методом бинарного поиска можно подобрать минимальное необходимое количество исходных заготовок.

Решение

Ниже представлено решение на языке C++.

C++

```cpp
#include<bits/stdc++.h>
#define int long long
using namespace std;
int f1(int M, int a){
    int res = 0, z = 0;
    while(1){
        if(M == 0 && z < a){
            return res;
        }
        res += M;
        M = M + z;
        z = M % a;
        M = M / a;
    }
}
```

```cpp
int f2(int M, int b){
    return M + M / b;
}
signed main(){
    int a, b, c;
    cin >> a >> b >> c;
    int L = 0, R = 1;
    while(f1(R, a) <= c){
        R *= 2;
    }
    while(R - L > 1){
        int M = (R + L) / 2;
        if(f1(M, a) < c){
            L = M;
        }
        else{
            R = M;
        }
    }
    int z = R;
    L = 0, R = 1;
    while(f2(R, b) <= z){
        R *= 2;
    }
    while(R - L > 1){
        int M = (R + L) / 2;
        if(f2(M, b) < z){
            L = M;
        }
        else{
            R = M;
        }
    }
    cout << R << endl;
}
```

Задача 2.2.1.5. Сон таксиста (30 баллов)

Имя входного файла: стандартный ввод или `input.txt`.

Имя выходного файла: стандартный вывод или `output.txt`.

Ограничение по времени выполнения программы: 1 с.

Ограничение по памяти: 64 Мбайт.

Условие

Одному таксисту приснился красочный сон. Во сне он живет и работает в некотором городе, где абсолютно все улицы с односторонним движением. Эти улицы устроены так, что невозможно проехать с какого-либо перекрестка так, чтобы вернуться обратно на этот же перекресток, то есть в дорожной сети города нет циклов.

Таким образом, если с перекрестка A можно попасть по направлению движения улиц на перекресток B, то люди вызывают такси, иначе их везет специальный муниципальный подземный транспорт бесплатно.

В связи с такими странными правилами, таксистам в этом городе разрешено законом везти пассажира по любому маршруту, не нарушающему направления движения. Все в этом городе привыкли к такой ситуации и абсолютно спокойно относятся к тому, что таксисты везут их самым длинным путем. Разумеется, заработок таксиста за одну поездку прямо пропорционален ее длине. Для упрощения будем считать, что стоимость 1 км поездки составляет ровно 1 руб.

Схема дорог города задана. Перекрестки города пронумерованы числами от 1 до n. Таксист в своем сне находится на перекрестке номер S. Напишите программу, которая подскажет ему, сколько он максимально сможет заработать, когда ему придет заказ от клиента. Так как он не знает, куда попросит его везти клиент, нужно для каждого перекрестка от 1 до n указать максимальную стоимость поездки до этого перекрестка из пункта S на такси. Если по правилам на такси добраться из пункта S до какого-то перекрестка нельзя, вывести -1.

Формат входных данных

Дорожная сеть задана следующим образом: в первой строке находятся два числа через пробел n и m — число перекрестков и число улиц в городе, где $2 \leqslant n, m \leqslant 2 \cdot 10^5$.

В следующих m строках задана очередная односторонняя улица в виде трех чисел A, B, d через пробел, где A — начало улицы, B — конец улицы и d — ее длина. $1 \leqslant A, B \leqslant n$, $1 \leqslant d \leqslant 10^9$. Гарантируется, что в этой дорожной сети нет циклов. Некоторые пары перекрестков могут быть соединены двумя и более односторонними улицами. Дорожная сеть может быть неплоской за счет мостов и тоннелей.

В последней строке ввода содержится номер стартового перекрестка S, $1 \leqslant S \leqslant n$.

Формат выходных данных

Вывести n чисел в одну строку через пробел. i-е число обозначает длину самого длинного пути с перекрестка номер S до перекрестка номер i. Если до перекрестка номер i от S нельзя доехать, не нарушая правила движения, вывести -1.

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод

```
10 20
9 10 15
9 8 3
8 10 7
7 8 4
7 10 10
5 8 2
5 9 10
```

Стандартный ввод
5 6 5 7 6 5 4 6 8 3 6 4 3 4 6 5 3 2 2 5 2 2 3 3 3 1 5 1 4 2 2 1 7 4 7 4 6 8 1 5

Стандартный вывод
7 -1 2 9 0 18 13 19 10 26

Комментарий

Задача решается методом динамического программирования на ориентированном ациклическом графе.

Решение

Ниже представлено решение на языке C++.

C++

```
#include<bits/stdc++.h>
#define int long long
using namespace std;
int n, m;
vector<vector<pair<int, int> > > G;
vector<int> order, used;
void dfs(int a){
    used[a] = 1;
    for(auto to : G[a]){
        if(!used[to.first]){
            dfs(to.first);
        }
    }
    order.push_back(a);
}
signed main(){
    cin >> n >> m;
    G.resize(n + 1);
    used.resize(n + 1, 0);
    for(int i = 0; i < m; i++){
        int a, b, d;
        cin >> a >> b >> d;
        G[a].push_back({b, d});
    }
```

```
    int s;
    cin >> s;
    dfs(s);
    reverse(order.begin(), order.end());
    vector<int> dp(n + 1, -1);
    dp[s] = 0;
    for(auto el : order){
        for(auto to : G[el]){
            dp[to.first] = max(dp[to.first], dp[el] + to.second);
        }
    }
    for(int i = 1; i <= n; i++){
        cout << dp[i] <<' ';
    }
}
```

2.2.2. Вторая волна. Задачи 8–11 класса

Задачи второй волны предметного тура по информатике открыты для решения. Соревнование доступно на платформе Яндекс.Контест: https://contest.yandex.ru/contest/63454/enter/.

Задача 2.2.2.1. Игра на планшете (10 баллов)

Имя входного файла: стандартный ввод или `input.txt`.

Имя выходного файла: стандартный вывод или `output.txt`.

Ограничение по времени выполнения программы: 1 с.

Ограничение по памяти: 64 Мбайт.

Условие

Маленький Андрей изучает геометрические фигуры при помощи игры на планшете. У него есть прямоугольные треугольники четырех цветов и ориентаций: желтые, зеленые, красные и синие. Для каждой разновидности треугольников есть заданное количество экземпляров этих треугольников. Более точно: у Андрея есть a желтых, b зеленых, c красных и d синих треугольников. Помимо этого у него есть прямоугольная таблица $n \times m$.

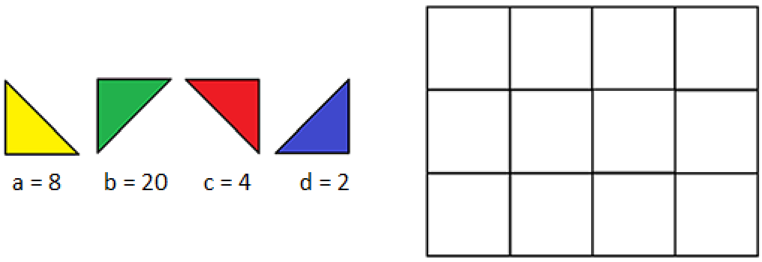


Рис. 2.2.1

Треугольники одного цвета имеют одну и ту же ориентацию, которую нельзя поменять. Андрей может только взять очередной треугольник и переместить его параллельным сдвигом в одну из ячеек этой прямоугольной таблицы. При этом в одну ячейку можно поместить либо вместе желтый и красный треугольники, либо вместе зеленый и синий, либо один любой треугольник из имеющихся.

Андрей хочет расположить в ячейках таблицы как можно больше треугольников из тех, что у него имеются. Нужно подсказать ему максимальное количество треугольников, которые получится разместить в таблице.

Формат входных данных

В первой строке содержатся четыре целых числа a, b, c и d через пробел — количество желтых, зеленых, красных и синих треугольников соответственно.

Во второй строке содержатся два целых числа n и m через пробел — размеры прямоугольной таблицы.

Все числа в пределах от 1 до 10^9.

Формат выходных данных

Вывести одно число — максимальное количество треугольников, которые можно при заданных условиях разместить в таблице.

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод
`8 20 4 2` `3 4`

Стандартный вывод
`18`

Примечания

На рис. 2.2.2 представлен один из примеров размещения 18 треугольников из 34 заданных на входе.

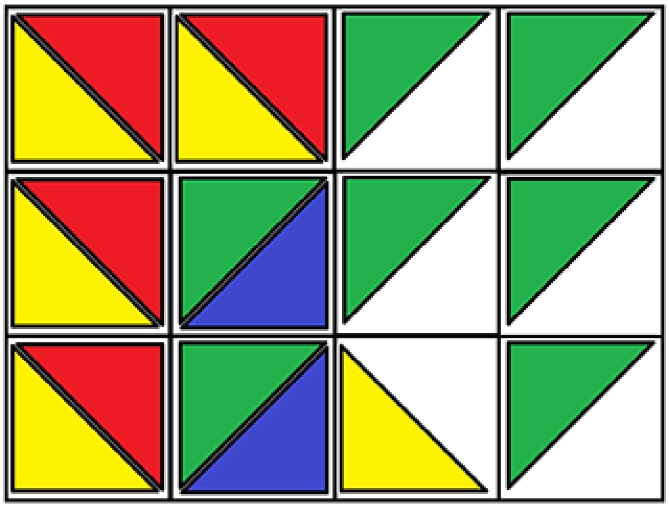


Рис. 2.2.2

Решение

Ниже представлено решение на языке C++.

C++

```
#include<bits/stdc++.h>
#define int long long
using namespace std;
signed main(){
    int a, b, c, d, n, m;
    cin >> a >> b >> c >> d >> n >> m;
    if(a > c){
        swap(a, c);
    }
    if(b > d){
        swap(b, d);
    }
    int f = a + b;
    int k = n * m;
    if(k <= f){
        cout << k * 2;
        return 0;
    }
    k -= f;
    c -= a;
    d -= b;
    cout << f * 2 + min(k, c + d) << endl;
}
```

Задача 2.2.2.2. Старая задача на новый лад (15 баллов)

Имя входного файла: стандартный ввод или `input.txt`.

Имя выходного файла: стандартный вывод или `output.txt`.

Ограничение по времени выполнения программы: 1 с.

Ограничение по памяти: 64 Мбайт.

Условие

Одна старая задача имеет следующий вид:

«Разбить число 45 на сумму четырех слагаемых так, что если к первому прибавить 2, из второго вычесть 2, третье умножить на 2, а четвертое разделить на 2, то получится одно и то же число».

Ответ к этой задаче — четыре числа 8, 12, 5 и 20. Можно убедиться, что в сумме они дают число 45, а если с каждым из них проделать соответствующую арифметическую операцию, то получится одно и то же число 10.

Необходимо решить чуть более общую задачу: даны числа n и k. Нужно представить число n в виде суммы четырех целых неотрицательных слагаемых $a + b + c + d$ таких, что $a + k = b - k = c \cdot k = d/k$. Гарантируется, что для заданных n и k такое разбиение существует.

Формат входных данных

В одной строке через пробел два числа n и k, где $1 \leqslant n \cdot k \leqslant 10^{18}$.

Формат выходных данных

Вывести через пробел в одну строку четыре целых неотрицательных числа a, b, c, d таких, что $a + b + c + d = n$ и $a + k = b - k = c \cdot k = d / k$.

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод
`45 2`

Стандартный вывод
`8 12 5 20`

Пример №2

Стандартный ввод
`128 7`

Стандартный вывод
`7 21 2 98`

Решение

Ниже представлено решение на языке C++.

C++

```cpp
#include<bits/stdc++.h>
#define int long long
using namespace std;
signed main(){
    int n, k;
    cin >> n >> k;
    int x = (k * n) / (k * k + 2 * k + 1);
    cout << x - k <<' '<< x + k <<' '<< x / k <<' '<< x * k << endl;
}
```

Задача 2.2.2.3. Ладья и обязательная клетка (20 баллов)

Имя входного файла: стандартный ввод или `input.txt`.

Имя выходного файла: стандартный вывод или `output.txt`.

Ограничение по времени выполнения программы: 1 с.

Ограничение по памяти: 64 Мбайт.

Условие

Шахматная ладья находится в левом верхнем углу прямоугольного поля, разбитого на клетки размером $n \times m$. n обозначает число строк, m — число столбцов. Она хочет попасть в правую нижнюю клетку этого поля кратчайшим путем. Ладья может передвигаться либо вправо, либо вниз на любое количество клеток. Ладья обязана посетить заданную клетку с координатами (x, y), где x — номер строки этой клетки, а y — номер ее столбца.

Требуется найти количество способов построить путь ладьи из левого верхнего угла в правый нижний, которые проходят через обязательную клетку с заданными координатами.

Формат входных данных

В первой строке находятся два числа через пробел: n — число строк и m — число столбцов прямоугольного поля, $2 \leqslant n, m \leqslant 25$. Во второй строке через пробел находятся координаты (x, y) обязательной для посещения клетки, где $1 \leqslant x \leqslant n$, $1 \leqslant y \leqslant m$. Координаты x и y не совпадают с координатами левой верхней и правой нижней клеток.

Формат выходных данных

Вывести одно число — количество кратчайших путей ладьи из верхней левой в правую нижнюю клетку, проходящих через заданную клетку.

Примеры

Стандартный ввод
3 4 2 3

Стандартный вывод
6

Примечания

На рис. 2.2.3 представлены шесть путей, которыми ладья может пройти по полю размером 3×4, обязательно посещая по пути клетку $(2, 3)$.

Комментарий

Задачу можно решить как комбинаторными методами (произведение биномиальных коэффициентов), так и динамическим программированием.

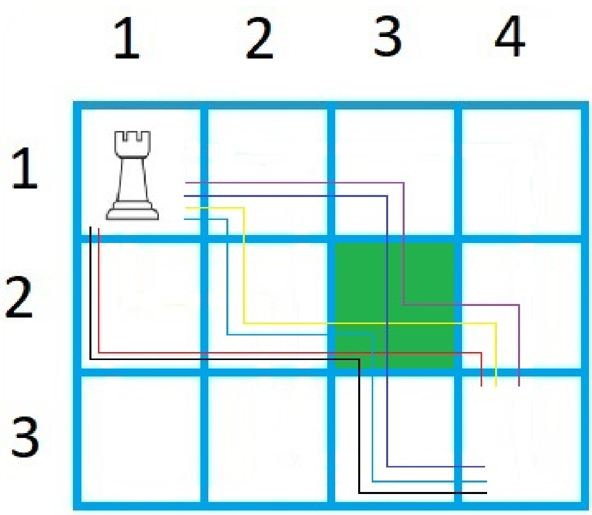


Рис. 2.2.3

Решение

Ниже представлено решение на языке C++.

C++

```
#include<bits/stdc++.h>
#define int long long
using namespace std;
signed main(){
    vector<vector<int> > bc(51, vector<int>(51, 0));
    bc[0][0] = 1;
    for(int i = 1; i <= 50; i++){
        for(int j = 0; j < 51; j++){
```

```
            bc[i][j] += bc[i - 1][j];
            if(j - 1 >= 0){
                bc[i][j] += bc[i - 1][j - 1];
            }
        }
    }
    int n, m, x, y;
    cin >> n >> m >> x >> y;
    int d1 = bc[x - 1 + y - 1][x - 1];
    int d2 = bc[n - x + m - y][n - x];
    int ans = d1 * d2;
    cout << ans << endl;
}
```

Задача 2.2.2.4. Танец с цифрами (25 баллов)

Имя входного файла: стандартный ввод или `input.txt`.

Имя выходного файла: стандартный вывод или `output.txt`.

Ограничение по времени выполнения программы: 1 с.

Ограничение по памяти: 64 Мбайт.

Условие

Десять танцоров репетируют на сцене новый танец. Каждый танцор одет в футболку, на которой написана одна из цифр от 1 до 9, цифры могут повторяться. Изначально они стоят в некотором порядке слева направо, и их цифры образуют некоторое десятизначное число A. Далее во время всего танца участники либо разбиваются на пять пар рядом стоящих танцоров и одновременно меняются местами внутри своих пар, либо самый левый танцор перемещается на самую правую позицию и становится самым правым танцором.

Сын постановщика танца от скуки на бумаге выписывает все получающиеся при каждом перемещении десятизначные числа. Так как танец длинный, то в итоге на бумаге окажутся все возможные числа, которые в принципе могут появится при этих условиях. Нужно найти разницу между самым большим и самым маленьким из этих чисел.

Формат входных данных

На вход подается одно десятизначное число A, обозначающее начальное расположение танцоров. В числе могут встречаться цифры от 1 до 9, некоторые из них могут повторяться.

Формат выходных данных

Вывести одно число, равное разности самого большого и самого маленького из чисел, которые могут быть получены во время танца.

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод
1456531355

Стандартный вывод
5182160085

Примечания

Самое маленькое число, которое можно получить в примере, равно 1353155456, самое большое равно 6535315541.

Покажем, как получить эти числа из исходного числа 1456531355. Сначала получим самое большое следующим образом: две левых цифры, 1 и 4, переместим вправо, получим 5653135514, потом поменяем в парах цифры местами и получим самое большое — 6535315541. Далее опять поменяем порядок в парах и в числе 5653135514 переместим три левых цифры 5, 6 и 5 вправо, получим 3135514565 и здесь снова поменяем порядок в парах, получим самое маленькое — 1353155456. Таким образом, искомая разница равна 5182160085.

Решение

Ниже представлено решение на языке C++.

C++

```cpp
#include<bits/stdc++.h>
#define int long long
using namespace std;
signed main(){
    string s;
    cin >> s;
    string mx = s, mn = s;

    for(int i = 0; i < 5; i++){
        for(int j = 0; j < 10; j++){
            mx = max(mx, s);
            mn = min(s, mn);
            if(j < 9){
                s = s.substr(1) + s[0];
            }
        }
        for(int j = 0; j < 5; j++){
            swap(s[2 * j], s[2 * j + 1]);
        }
    }
    stringstream ssmn;
    ssmn << mn;
    int imn;
    ssmn >> imn;
    stringstream ssmx;
```

```
    ssmx << mx;
    int imx;
    ssmx >> imx;
    cout << imx - imn << endl;
}
```

Задача 2.2.2.5. Трудная сортировка (30 баллов)

Имя входного файла: стандартный ввод или `input.txt`.

Имя выходного файла: стандартный вывод или `output.txt`.

Ограничение по времени выполнения программы: 3 с.

Ограничение по памяти: 64 Мбайт.

Условие

Иннокентий работает в отделе сортировки перестановок, подотделе сортировки вставками. Его задача заключается в сортировке перестановок, предоставленных заказчиками. Перестановкой длины n называется такая последовательность чисел, в которой встречаются все числа от 1 до n без повторений в некотором порядке.

Перестановка считается отсортированной, если в ней все числа расположены по возрастанию, то есть она имеет вид $1, \ldots, n$.

Иннокентий начинает рабочий день с пустой последовательности чисел. За день он сортирует вставками перестановку длины n. В начале каждой операции вставки он получает очередное число a_i из перестановки заказчика, после чего обрабатывает его, вставляя в отсортированную последовательность из ранее полученных чисел. После каждого такого добавления последовательность уже обработанных чисел должна быть отсортирована по возрастанию.

Перед тем как вставить число a_i в последовательность, он может выбрать, с какого края последовательности начать вставку. Далее он устанавливает число a_i с этого края и последовательно меняет вставляемое число с рядом стоящим числом b_j до тех пор, пока число a_i не встанет на свое место. На каждую перестановку вставляемого числа a_i с числом b_j Иннокентий тратит b_j единиц энергии.

Дана перестановка длины n из чисел a_i в том порядке, в котором Иннокентий их будет обрабатывать. Подскажите ему, какое минимальное количество энергии ему потребуется потратить, чтобы отсортировать всю перестановку.

Формат входных данных

В первой строке находится одно целое число n — длина перестановки, где $1 \leqslant n \leqslant 2 \cdot 10^5$.

Во второй строке содержится n целых чисел a_i через пробел в том порядке, в котором они поступают на обработку Иннокентию. Гарантируется, что эти числа образуют перестановку длины n, то есть каждое число от 1 до n содержится в заданном наборе ровно один раз.

Формат выходных данных

Вывести одно число — минимальные суммарные энергозатраты Иннокентия для сортировки вставками заданной на входе перестановки.

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод
9 2 9 1 5 6 4 3 8 7

Стандартный вывод
43

Примечания

Первым устанавливается число 2. Оно ни с чем не меняется местами, поэтому затрат нет.

Далее устанавливается число 9. Выбираем правый край и ставим его туда без потерь энергии.

Затем устанавливаем число 1. Выбираем левый край, ставим его туда и снова потерь нет.

Теперь нужно вставить число 5. Если его вставлять с правого края, придется менять местами с 9, а если с левого, то с 1 и 2, что суммарно явно лучше. Итого затраты на вставку 5 равны 3.

Число 6 снова лучше вставить слева, затраты на его вставку равны 8.

Число 4 вставим слева за 3.

Число 3 так же слева за 3.

А вот число 8 лучше вставить справа за 9.

И осталось число 7. Если вставлять слева, то затратим 21, а если справа, то всего 17.

Итого на сортировку заданной перестановки потратили: $0 + 0 + 0 + 3 + 8 + 3 + 3 + 9 + 17 = 43$.

Комментарий

Построим дерево отрезков на сумму, при обработке числа a будем находить, какая сумма на данный момент меньше: от 1 до $a-1$ или от $a+1$ до n. Прибавим ее к ответу и поместим в позицию a это число a.

Решение

Ниже представлено решение на языке C++.

C++

```
#include<bits/stdc++.h>
#define int long long
using namespace std;
const int LG = 19;
int N = (1 << LG);
vector<int> tr(2 * N, 0);
void upd(int pos, int x){
    pos += N;
    tr[pos] = x;
    pos /= 2;
    while(pos){
        tr[pos] = {tr[2 * pos]+ tr[2 * pos + 1]};
        pos /= 2;
    }
}
int get(int l, int r){
    l += N;
    r += N;
    int res = 0;
    while(l <= r){
        if(l % 2 == 1){
            res += tr[l];
        }
        if(r % 2 == 0){
            res += tr[r];
        }
        l = (l + 1) / 2;
        r = (r - 1) / 2;
    }
    return res;
}
signed main(){
    int n, a;
    cin >> n;
    int ans = 0;
    for(int i = 0; i < n; i++){
        cin >> a;
        int sl = get(0, a - 1);
        int sr = get(a + 1, N - 1);
        ans += min(sl, sr);
        upd(a, a);
    }
    cout << ans << endl;
}
```

2.2.3. Третья волна. Задачи 8–11 класса

Задачи третьей волны предметного тура по информатике открыты для решения. Соревнование доступно на платформе Яндекс.Контест: https://contest.yandex.ru/contest/63456/enter/.

Задача 2.2.3.1. Туннель (10 баллов)

Имя входного файла: стандартный ввод или `input.txt`.

Имя выходного файла: стандартный вывод или `output.txt`.

Ограничение по времени выполнения программы: 1 с.

Ограничение по памяти: 64 Мбайт.

Условие

Рассмотрим классическую задачу прохождения группы с одним фонариком по туннелю. Есть четыре человека, и у них есть один фонарик. Нужно перевести всю группу на другой конец туннеля. По туннелю можно проходить только с фонариком и только либо вдвоем, либо в одиночку. По этой причине придется сделать пять рейсов по туннелю: три рейса туда и два рейса обратно. Туда идут двое, обратно — один, возвращая фонарик еще не прошедшей части группы. У каждого из четырех человек своя скорость передвижения по туннелю, но некоторые скорости могут совпадать. Двое идут со скоростью самого медленного в этой паре. Нужно найти минимальное время, за которое можно перевести группу по туннелю.

Здесь, в зависимости от скоростей персонажей, есть две стратегии. Проиллюстрируем их на примерах.

Пусть есть люди A, B, C, D. У A — время прохождения туннеля 1 мин, у B — 4 мин, у C — 5 мин, у D — 10 мин. Здесь работает наиболее очевидная стратегия: самый быстрый переводит текущего и возвращается с фонариком обратно за следующим. При этой стратегии нужно проходить так:

- A, B туда, затрачено 4 мин;
- A обратно, затрачена 1 мин;
- A, C туда, затрачено 5 мин;
- A обратно, затрачена 1 мин;
- A, D туда, затрачено 10 мин.

Общее время $4 + 1 + 5 + 1 + 10 = 21$ мин.

Но не всегда эта стратегия оптимальна. Уменьшим время прохождения туннеля персонажем B до 2 мин. По вышеопределенной стратегии будет 19 мин ($2 + 1 + 5 + 1 + 10 = 19$), но имеется более быстрое решение:

- A, B туда, затрачено 2 мин;
- A обратно, затрачена 1 мин;
- C, D туда, затрачено 10 мин;
- B обратно, затрачено 2 мин;
- A, B туда, затрачено 2 мин.

Общее время $2 + 1 + 10 + 2 + 2 = 17$ мин.

Заметим, что для предыдущего примера такая стратегия не работает: $4 + 1 + 10 + 4 + 4 = 23$ мин.

Если же персонаж B проходит туннель за 3 мин (а все остальные так же, как и в примерах), то независимо от стратегии будет затрачено 20 мин. В этом случае считаем, что работает первая стратегия.

Поразмыслив, станет понятно, от какого условия зависит выбор стратегии. Далее будем всегда считать, что A движется не медленнее B, B движется не медленнее C, C движется не медленнее D.

Дано время прохождения туннеля персонажами A, C, D. Нужно найти границу `border` для B такую, что если определить для B время прохождения строго меньшее, чем `border`, то выгодна вторая стратегия, иначе — первая.

Формат входных данных

В одной строке задано три целых чисел через пробел — время прохождения туннеля персонажами A, C, D. Времена даны по неубыванию. Все числа на входе в пределах от 1 до 100.

Формат выходных данных

Вывести одно число — границу `border` для B такую, что если определить время прохождения им туннеля строго меньше, чем `border`, нужно использовать вторую стратегию, иначе — первую. Ответ может быть нецелым, поэтому вывести его нужно с одним знаком после десятичной точки.

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод
1 5 10

Стандартный вывод
3

Решение

Ниже представлено решение на языке C++.

C++

```cpp
#include<bits/stdc++.h>
#define int long long
using namespace std;
signed main(){
    int A, C, D;
    cin >> A >> C >> D;
    cout.precision(1);
    cout << fixed << (A + C) / 2.0 << endl;
}
```

Задача 2.2.3.2. Математический пазл (15 баллов)

Имя входного файла: стандартный ввод или `input.txt`.

Имя выходного файла: стандартный вывод или `output.txt`.

Ограничение по времени выполнения программы: 1 с.

Ограничение по памяти: 64 Мбайт.

Условие

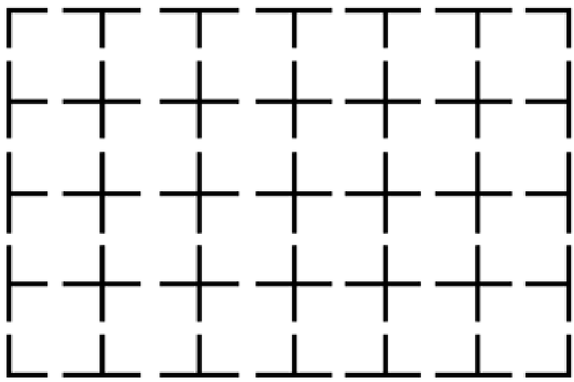


Рис. 2.2.4

Компания по производству пазлов решила освоить принципиально новый тип головоломок. Для этого берется прямоугольная решетка размера $n \times m$, каждый ее столбец и строка разрезаются посередине пополам. После этого образуются фигуры трех типов: четыре уголка, $2{\cdot}(n{+}m{-}2)$ т-образных фигур и $(n{-}1){\cdot}(m{-}1)$ крестиков.

Тому, кто решает головоломку, требуется сложить из этих фигур исходную прямоугольную решетку. При этом необходимо использовать абсолютно все имеющиеся в наличии фигуры.

Формат входных данных

В первой строке заданы через пробел два числа a — количество т-образных фигур и b — количество крестиков, которые находятся в одном из пазлов. При этом в наборе всегда есть еще четыре уголка. Известно, что этот комплект позволяет собрать прямоугольную решетку размера $n \times m$, где $1 \leqslant n,\ m \leqslant 10^9$.

Формат выходных данных

Требуется по числам a и b найти размеры исходной решетки n и m. Будем всегда считать, что $n \leqslant m$, то есть нужно вывести в одну строку через пробел два числа, первое из которых не превосходит второго, и вместе они задают размеры загаданной решетки.

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод
16 15

Стандартный вывод
4 6

Пример №2

Стандартный ввод
0 0

Стандартный вывод
1 1

Комментарий

Задачу можно решить либо бинарным поиском, либо при помощи квадратного уравнения.

Решение

Ниже представлено решение на языке C++ при помощи бинпоиска.

C++

```cpp
#include<bits/stdc++.h>
#define int long long
using namespace std;
signed main(){
    int a, b;
    cin >> a >> b;
    int L = 0, R = a / 4 + 1;
    while(R - L > 1){
        int M = (R + L) / 2;
        int D = a / 2 - M;
        if(M * D <= b){
            L = M;
        }
        else{
            R = M;
        }
    }
    cout << L + 1 <<' '<< a / 2 - L + 1 << endl;
}
```

Задача 2.2.3.3. Восемь пирогов и одна свечка (20 баллов)

Имя входного файла: стандартный ввод или `input.txt`.

Имя выходного файла: стандартный вывод или `output.txt`.

Ограничение по времени выполнения программы: 1 с.

Ограничение по памяти: 64 Мбайт.

Условие

Мечта Карлсона наконец-то сбылась! Мама Малыша испекла восемь пирогов прямоугольной формы и в один из них воткнула свечку. После того как Карлсон съел семь пирогов, он решил-таки поделиться кусочком оставшегося восьмого пирога с Малышом. Но, будучи в хорошем настроении, он вынул из пирога свечу и предложил ему решить задачку.

«Так как я самый щедрый Карлсон в мире, то делить оставшийся пирог будешь ты. Но учти, ты должен разрезать пирог одним прямым разрезом так, чтобы линия прошла через один из углов и точку, где стояла свечка. После этого я выберу себе один из двух кусочков, а оставшийся, так и быть, достанется тебе».

Малыш не против этого замысла, однако считает, что разрезать пирог нужно как можно более справедливо, то есть так, чтобы разница между меньшим и большим кусками была как можно меньше. Подскажите Малышу, какой минимальной разницы между площадями кусков он сможет добиться.

Формат входных данных

В первой строке находятся два числа n и m через пробел — размеры прямоугольного пирога. Пирог размещен на координатной плоскости так, что его левый нижний угол находится в точке $(0, 0)$, а правый верхний — в точке (n, m), где $2 \leqslant n,\ m \leqslant 1\,000$.

Во второй строке находятся два числа x и y через пробел — координаты свечки, где $1 \leqslant x \leqslant n - 1$, $1 \leqslant y \leqslant m - 1$, то есть свечка находится строго внутри пирога.

Формат выходных данных

Вывести одно вещественное число с точностью не менее трех знаков после десятичной точки — минимальную разницу между площадями двух получающихся после разрезания кусков, которую сможет получить Малыш.

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод
8 5 7 2

Стандартный вывод
12.571

Пример №2

Стандартный ввод
2 2 1 1

Стандартный вывод
0.000

Примечания

На рис. 2.2.5 представлены четыре варианта разделения пирога для первого примера из условия. Можно видеть, что самый близкий к справедливому способ разделения связан с разрезом из левого верхнего угла. Площадь треугольника в этом случае будет равна 96 / 7, площадь четырехугольника равна 184 / 7, и разница равна 88 / 7, что при округлении до трех знаков равно 12,571.

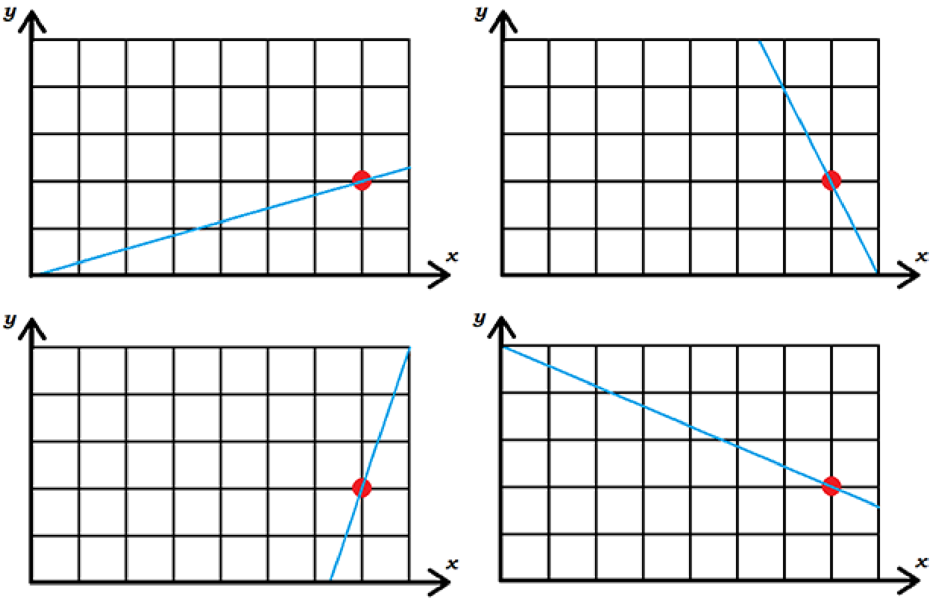


Рис. 2.2.5

Комментарий

Геометрия: для каждого из четырех случаев аккуратно находим катеты прямоугольного треугольника при помощи пропорции, затем находим площадь этого треугольника и, вычитая из всего прямоугольника эту площадь, находим площадь второго куска. Далее выбираем наиболее оптимальное отношение площадей.

Решение

Ниже представлено решение на языке C++.

C++

```cpp
#include<bits/stdc++.h>
#define int long long
using namespace std;
const int INF = 1e18;
double katy(double x, double y, double n){
    return n * y / x;
}
double n, m, x, y;
double ans = INF;
double k1, k2;
void upd(){
    if(k1 < m){
        double st =k1 * n / 2;
        ans = min(ans, n * m - 2 * st);
    }
    else{
        double st =k2 * m / 2;
        ans = min(ans, n * m - 2 * st);
    }}
signed main(){
    cin >> n >> m >> x >> y;
    k1 = katy(x, y, n);
    k2 = katy(y, x, m);
    upd();
    k1 = katy(n - x, y, n);
    k2 = katy(y, n - x, m);
    upd();
    k1 = katy(x, m - y, n);
    k2 = katy(m - y, x, m);
    upd();
    k1 = katy(n - x, m - y, n);
    k2 = katy(m - y, n - x, m);
    upd();
    cout.precision(3);
    cout << fixed << ans<< endl;
}
```

Задача 2.2.3.4. Плетенка (25 баллов)

Имя входного файла: стандартный ввод или `input.txt`.

Имя выходного файла: стандартный вывод или `output.txt`.

Ограничение по времени выполнения программы: 1 с.

Ограничение по памяти: 64 Мбайт.

Условие

У Маши есть n полосок бумаги. i-я полоска имеет ширину 1 и длину a_i. Маша разделит эти полоски на две части и покрасит некоторые в желтый, а оставшиеся — в зеленый цвет. Она сама выберет, какие полоски как покрасить. Далее она хочет из этих полосок сплести максимально большую плетенку. Она расположит полоски одного цвета в некотором порядке горизонтально, а полоски другого цвета в некотором порядке вертикально. После этого она переплетет горизонтальные и вертикальные полоски так, что они будут чередоваться то сверху, то снизу, образуя в местах пересечения шахматную раскраску. Наконец, она обрежет выступающие края полосок так, что останется прямоугольная плетенка с ровными краями. Каждая клетка полученной плетенки должна иметь два слоя.

Маша хочет сплести максимально большую по площади прямоугольную плетенку. Подскажите ей, плетенку какой площади она сможет сделать. Заметим, что она может при создании плетенки использовать не все имеющиеся у нее полоски.

Формат входных данных

В первой строке на вход подается число n — количество полосок бумаги у Маши, где $2 \leqslant n \leqslant 2 \cdot 10^5$. Во второй строке через пробел заданы n целых чисел a_i через пробел — длины полосок, где $1 \leqslant a_i \leqslant 10^9$.

Формат выходных данных

Вывести одно число — площадь прямоугольника, форму которого может иметь самая большая плетенка Маши.

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод
8 3 6 5 4 4 5 5 2

Стандартный вывод
12

Примечания

На рис. 2.2.6 представлен один из вариантов получения самой большой плетенки для полосок из примера. Синим обозначена граница полученной максимальной плетенки. Ее размер 3×4, и ее площадь 12. При ее создании Маша не должна использовать полоску номер 8, по этой причине неважно, как она раскрашена.

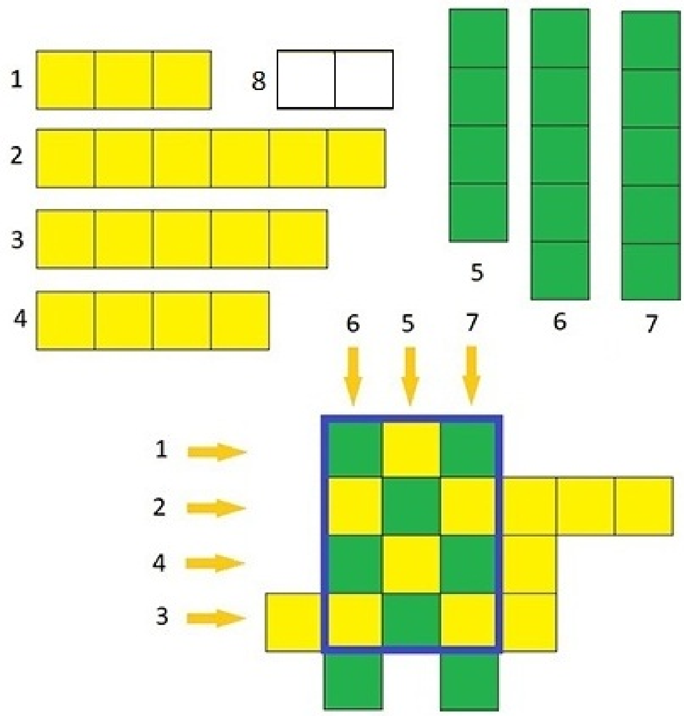


Рис. 2.2.6

Решение

Ниже представлено решение на языке C++.

C++

```
#include<bits/stdc++.h>
#define int long long
using namespace std;
signed main(){
    int n;
    cin >> n;
    deque<int> v(n);
    for(int i = 0; i < n; i++){
        cin >> v[i];
    }
    sort(v.begin(), v.end());
    int ans = 0;
    int cnth = 0, minh;
    while(1){
        if(v.size() == 0){
            break;
        }
        cnth++;
        minh = v.back();
        v.pop_back();
        while(v.size() > 0 && v[0] < cnth){
            v.pop_front();
        }
        ans = max(ans, cnth * min(minh, (int)v.size()));
    }
    cout << ans << endl;
}
```

Задача 2.2.3.5. Английский в игровой форме (30 баллов)

Имя входного файла: стандартный ввод или `input.txt`.

Имя выходного файла: стандартный вывод или `output.txt`.

Ограничение по времени выполнения программы: 3 с.

Ограничение по памяти: 64 Мбайт.

Условие

Маша и Витя запоминают слова английского языка в оригинальной игровой форме. За день им нужно выучить n слов, где $20 \leqslant n \leqslant 100$, каждое из которых имеет длину от 5 до 8 символов. Маша выбирает из этого набора наугад несколько попарно различных слов (также от 5 до 8) и собирает их в одну строку без пробелов. Далее она переставляет буквы в этой строке так, что слова оказываются полностью перепутанными, и дает эту строку Вите. Теперь Витя должен восстановить все слова, которые выбрала Маша.

Но у Вити плохо получается, а Маша уже забыла, какие слова она выбрала. Нужно им помочь — написать программу, которая восстановит слова, выбранные Машей.

Формат входных данных

В первой строке находится строка, которую Маша предложила Вите. Во второй строке содержится число n — количество слов, которые нужно выучить детям, $20 \leqslant n \leqslant 100$.

В следующих n строках содержатся эти слова по одному в строке. Все слова в этом наборе различны. Слова отсортированы в лексикографическом (алфавитном) порядке. Все слова состоят из маленьких букв от a до z. Обратите внимание, что в тестах к этой задаче все заданные слова реально существуют в английском языке и случайным образом выбраны из словаря.

Гарантируется, что длина каждого слова из предложенного набора (словаря) в пределах от 5 до 8, строка, которую получила Маша, может быть получена путем перестановки букв некоторых различных слов из предложенного словаря, причем, набор выбранных Машей слов определяется по ней однозначно. Количество слов, из которых составлена Машина строка, находится в пределах от 5 до 8.

Формат выходных данных

Вывести все слова, выбранные Машей, в алфавитном порядке по одному в строке.

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод
stirbaexsudueoeidgomttcrnrwlunapntetacwri 24 bridge cranky document drawing farmer fighter figurine gravy havoc minimum reactant reply republic sonata soprano split subset tailor texture tomorrow trout vicinity wrist writer

Стандартный вывод
document drawing republic sonata texture wrist

Комментарий

В случае, выделенном в условии (слова являются случайными, взятыми из английского словаря), задача решается рекурсией с перебором вариантов.

Решение

Ниже представлено решение на языке C++.

C++

```
#include<bits/stdc++.h>
#define int long long
using namespace std;
string frs;
int n;
vector<string> dict;
vector<int> msk(26, 0);
int cnt = 0;
vector<vector<int> > amsk;
vector<string> ans;
bool bigok = 0;
void p(int pos){
    if(!bigok){
        if(cnt == 0){
            sort(ans.begin(), ans.end());
            bigok = 1;
            return;
        }
        for(int i = pos; i < n; i++){
            string ts = dict[i];
            bool ok = 1;
            for(int j = 0; j < 26; j++){
                if(amsk[i][j] > msk[j]){
                    ok = 0;
                }
            }
            if(ok){
                ans.push_back(ts);
                for(int j = 0; j < 26; j++){
                    msk[j] -= amsk[i][j];
                    cnt -= amsk[i][j];
                }
                p(i + 1);
                if(!bigok){
                for(int j = 0; j < 26; j++){
                    msk[j] += amsk[i][j];
                    cnt += amsk[i][j];
                }
                ans.pop_back();
                }
            }
        }
    }
}
signed main(){
    cin >> frs;
    cin >> n;
    amsk.resize(n, vector<int>(26, 0));

    string ts;
    for(int i = 0; i < n; i++){
        cin >> ts;
        dict.push_back(ts);
    }
    for(int i = 0; i < n; i++){
        for(auto el : dict[i]){
            amsk[i][el - 'a']++;
        }
    }
```

```
    for(auto el : frs){
        msk[el - 'a']++;
        cnt++;
    }
    p(0);
    for(auto el : ans){
        cout << el << endl;
    }
}
```

2.2.4. Четвертая волна. Задачи 8–11 класса

Задачи четвертой волны предметного тура по информатике открыты для решения. Соревнование доступно на платформе Яндекс.Контест: https://contest.yandex.ru/contest/63457/enter/.

Задача 2.2.4.1. Квадратный флаг (10 баллов)

Имя входного файла: стандартный ввод или `input.txt`.

Имя выходного файла: стандартный вывод или `output.txt`.

Ограничение по времени выполнения программы: 1 с.

Ограничение по памяти: 64 Мбайт.

Условие

Одному портному заказали сделать одноцветный флаг. Особенность этого флага в том, что он должен быть квадратным. У портного есть два прямоугольных куска ткани заданного цвета. Один из них имеет размеры $a \times b$, другой — $c \times d$. Так как клиент будет платить пропорционально площади изготовленного флага, портной хочет сначала сшить имеющиеся у него прямоугольные куски, соединив их двумя какими-то сторонами, а затем из полученного полотна вырезать и сделать флаг с максимально большой стороной. Определить сторону получившегося у него флага.

Формат входных данных

На вход подаются две строки. В первой строке находятся размеры первого прямоугольника — целые числа a, b через пробел, во второй — размеры второго прямоугольника, также целые числа c, d через пробел, где $1 \leqslant a, b, c, d \leqslant 10^9$.

Формат выходных данных

Вывести одно число — сторону самого большого квадрата, который можно получить по условию задачи.

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод
2 4 3 6

Стандартный вывод
4

Пример №2

Стандартный ввод
2 2 3 6

Стандартный вывод
3

Примечания

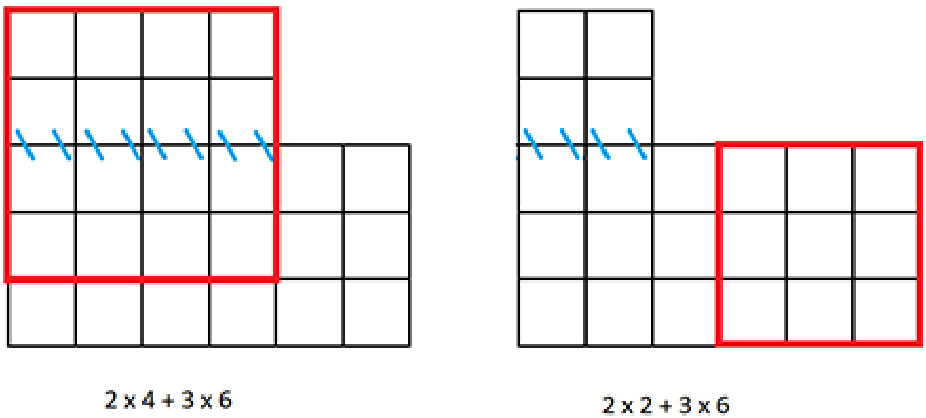


Рис. 2.2.7

На рис. 2.2.7 представлены иллюстрации для тестов из условия. Синими штрихами обозначено место сшивки двух кусков. Красный квадрат выделяет один из вариантов вырезания максимального квадрата.

Решение

Ниже представлено решение на языке C++.

C++

```
#include<bits/stdc++.h>
#define int long long
using namespace std;
signed main(){
    int a, b, c, d;
    cin >> a >> b >> c >> d;
    int ans = max(min(a, b), min(c, d));
    int p1 = min(a + c, min(b, d));
    int p2 = min(a + d, min(b, c));
    int p3 = min(b + c, min(a, d));
    int p4 = min(b + d, min(a, c));
    ans = max({ans, p1, p2, p3, p4});
    cout << ans << endl;
}
```

Задача 2.2.4.2. Потерянная ДНК (15 баллов)

Имя входного файла: стандартный ввод или `input.txt`.

Имя выходного файла: стандартный вывод или `output.txt`.

Ограничение по времени выполнения программы: 1 с.

Ограничение по памяти: 64 Мбайт.

Условие

В данной задаче будем упрощенно считать, что ДНК представляется строкой длины от 10 до 100, состоящей из букв A, C, G, T.

Пусть даны две ДНК D_1 и D_2 одной и той же длины n. Выберем некоторое произвольное число i от 1 до $n-1$ и поменяем местами префиксы (начала) этих ДНК длины i. Будем говорить, что полученные новые две строки образованы путем скрещивания двух исходных по префиксу длины i.

Например, пусть $D_1 =$ **AACGGTAGGT**, а $D_2 =$ TCCCGGAACA. Выберем $i = 4$ и поменяем местами префиксы длины 4. Получим две новые ДНК, одна из которых будет иметь вид **AACG**GGAACA, а вторая — TCCC**GTAGGT**. Для наглядности были выделены части первой из них.

Полученные новые ДНК снова могут быть скрещены по любому префиксу длины от 1 до $n-1$.

Теперь можно рассмотреть популяцию из нескольких ДНК. Выберем из них две, произведем их скрещивание по префиксу какой-либо длины и поместим две новые ДНК в исходную популяцию. В данной задаче будем считать, что количество ДНК не увеличивается, то есть старые две ДНК заменяются на новые две ДНК.

Дана исходная популяция из m ДНК, каждая имеет одну и ту же длину n. После некоторого количества попарных скрещиваний была получена новая популяция. Но при итоговой обработке данных сведения об одной ДНК из новой популяции были потеряны. Задача состоит в отыскании этой потерянной ДНК по оставшимся $m-1$ ДНК из новой популяции.

Формат входных данных

В первой строке через пробел даны два числа n — длина ДНК и m — количество ДНК в исходной популяции, где $10 \leqslant n \leqslant 100$, $2 \leqslant m \leqslant 100$.

В следующих m строках содержится описание исходной популяции ДНК, каждая задается строкой длины n, состоящей из символов A, C, G и T.

Далее следует разделяющая строка, содержащая n символов «-».

Далее следует еще $m-1$ строк, описывающих новую (заключительную) популяцию без одной ДНК.

Гарантируется, что данные верны, то есть $m-1$ последняя ДНК является некоторой новой популяцией ровно без одной ДНК, полученной из исходной популяции, заданной в m первых строках.

Формат выходных данных

Вывести недостающую утерянную ДНК.

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод
10 2 AACGGTAGGT TCCCGGAACA ---------- TCCCGTAGGT

Стандартный вывод
AACGGGAACA

Пример №2

Стандартный ввод
10 4 AACCGGTTAA ACGTACGTAC AAACCCGGGT CATTACTGGA ---------- AAGCGCTTAA CCACACGTGC AACTAGGGGT

Стандартный вывод
AATTCCTGAA

Комментарий

Для каждой позиции нужно найти недостающую букву из первого набора ДНК. Для этого удобнее всего использовать функцию `xor`.

Решение

Ниже представлено решение на языке C++.

C++

```cpp
#include<bits/stdc++.h>
#define int long long
using namespace std;
signed main(){
    int n, m;
    cin >> n >> m;
    vector<string> v1(m);
    for(int i = 0; i < m; i++){
        cin >> v1[i];
    }
    string d;
    cin >> d;
    vector<string> v2(m - 1);
    for(int i = 0; i < m - 1; i++){
        cin >> v2[i];
    }
    for(int j = 0; j < n; j++){
        int ss = 0;
        for(int i = 0; i < m; i++){
            ss ^= (int)(v1[i][j]);
        }
        for(int i = 0; i < m - 1; i++){
            ss ^= (int)(v2[i][j]);
        }
        cout << (char)(ss);
    }
    cout << endl;
}
```

Задача 2.2.4.3. Утомленные туристы (20 баллов)

Имя входного файла: стандартный ввод или `input.txt`.

Имя выходного файла: стандартный вывод или `output.txt`.

Ограничение по времени выполнения программы: 1 с.

Ограничение по памяти: 64 Мбайт.

Условие

Рассмотрим следующий вариант известной задачи на перемещение по туннелю группы из четырех человек. В общем виде она выглядит так: четыре туриста хотят пройти по темному туннелю. Имеется один фонарик. По туннелю можно перемещаться либо вдвоем, либо по одному, при этом у тех, кто движется в туннеле, должен быть фонарик в руках. По этой причине движение должно быть следующим: двое переходят туда, один возвращается обратно и приносит фонарик тем, кто еще не перешел. После этого указанный маневр повторяется снова.

У каждого участника своя скорость движения в туннеле. Пусть участники проходят туннель за A, B, C и D мин. Если идут двое, то они движутся со скоростью того, кто идет медленнее. Требуется по заданным временам прохождения туннеля каждого из участников перевести их максимально быстро через туннель.

Немного усложним данную задачу. Введем фактор усталости. А именно, любой участник, пройдя по туннелю, устает и в следующий раз идет уже медленнее. После каждого прохождения туннеля время прохождения любого участника увеличивается на E мин. Например, если участник до начала движения проходит туннель за 1 мин, а показатель усталости E равен 3 мин, то первый раз участник пройдет туннель за 1 мин, второй раз — за 4 мин, третий раз — за 7 мин и т. д.

По заданным A, B, C, D и E узнать, за какое минимальное время можно провести всю группу через туннель согласно указанным правилам.

Формат входных данных

На вход подаются пять чисел. В первой строке через пробел четыре числа A, B, C и D — время прохождения туннеля каждым из четырех участников до того, как они начали движение. Во второй строке содержится число E — величина, на которую увеличивается время прохождения туннеля каждым участником после каждого перемещения. При этом $1 \leqslant A, B, C, D \leqslant 1\,000$, $0 \leqslant E \leqslant 1\,000$.

Формат выходных данных

Вывести одно число — минимальное время прохождения туннеля всей группой.

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод

```
8 9 10 1
3
```

Стандартный вывод

```
44
```

Пример №2

Стандартный ввод

```
8 9 10 1
0
```

Стандартный вывод

```
29
```

Примечания

В первом примере при прохождении туннеля каждый турист устает и движется медленнее на 3 мин. Покажем, как перевести группу при этом за 44 мин.

Каждую ситуацию будем обозначать следующим образом: слева от двоеточия находятся туристы, которые стоят в начале туннеля, а справа — те, что стоят в конце туннеля. Туриста будем обозначать при помощи числа, соответствующего его текущему времени прохождения туннеля.

Тогда исходная ситуация имеет вид $1, 8, 9, 10 :$.

Сначала идут туристы 1 и 8, каждый после перехода устает на 3 мин, получим ситуацию $9, 10 : 4, 11$, затрачено 8 мин.

Обратно возвращается турист 4, он устает еще на 3 мин. Ситуация становится $7, 9, 10 : 11$, затрачено $8 + 4 = 12$ мин.

Теперь идут туристы 7 и 9, получится ситуация $10 : 10, 11, 12$, затрачено $8 + 4 + 9 = 21$ мин.

Возвращается турист 10, получится $10, 13 : 11, 12$, затрачено $8 + 4 + 9 + 10 = 31$ мин.

Наконец, оставшиеся двое туристов 10 и 13 за 13 мин переходят туннель, итого затрачено $8 + 4 + 9 + 10 + 13 = 44$ мин.

Комментарий

Задача решается рекурсивным перебором всех вариантов прохождения.

Решение

Ниже представлено решение на языке C++.

C++

```cpp
#include<bits/stdc++.h>
#define int long long
using namespace std;
const int INF = 1e18;
vector<int> v(4);
int e, ans = INF;
void p(vector<int> &vl, vector<int> &vr, int tv){
    if(vl.size() == 2){
        ans = min(ans, tv + *max_element(vl.begin(), vl.end()));
        return;
    }
    for(int i = 0; i < vl.size() - 1; i++){
        for(int j = i + 1; j < vl.size(); j++){
            vector<int> vl1;
            for(int k = 0; k < vl.size(); k++){
                if(k != i && k != j){
                    vl1.push_back(vl[k]);
                }
            }
            vector<int> vr1 = vr;
```

```
                vr1.push_back(vl[i] + e);
                vr1.push_back(vl[j] + e);
                int tmp = max(vl[i], vl[j]);
                sort(vr1.rbegin(), vr1.rend());
                vl1.push_back(vr1.back() + e);
                vr1.pop_back();
                p(vl1, vr1, tv + tmp + vl1.back() - e);
            }
        }
}
signed main(){
    for(int i = 0; i < 4; i++){
        cin >> v[i];
    }
    sort(v.begin(), v.end());
    cin >> e;
    vector<int> vl = v, vr;
    p(vl, vr, 0);
    cout << ans;
}
```

Задача 2.2.4.4. Проектируем мост (25 баллов)

Имя входного файла: стандартный ввод или `input.txt`.

Имя выходного файла: стандартный вывод или `output.txt`.

Ограничение по времени выполнения программы: 1 с.

Ограничение по памяти: 64 Мбайт.

Условие

При постройке моста используются два типа пролетов: П-образные (они прочные, но дорогие) и Т-образные (они дешевле, но менее надежные). Мост должен начинаться и заканчиваться П-образными пролетами. Любой Т-образный пролет должен иметь хотя бы один П-образный пролет в качестве соседнего.

Длина проектируемого моста — n пролетов. Муниципалитет выделил средства на постройку a П-образных и b Т-образных пролетов. При этом $a + b = n$. Требуется выяснить, сколькими способами при этих условиях можно скомпоновать мост. Два способа компоновки моста отличаются, если в одной на некоторой позиции стоит П-образный пролет, а в другой на этой же позиции стоит Т-образный пролет.

Формат входных данных

В одной строке через пробел заданы два числа: a — число П-образных пролетов и b — число Т-образных пролетов, на постройку которых выделены средства, где $2 \leqslant a \leqslant 10^6$, $0 \leqslant b \leqslant 10^6$.

Формат выходных данных

Вывести одно число — количество вариантов компоновки моста. Так как ответ может быть очень большим, требуется вывести остаток от его деления на $1\,000\,000\,007$ $(10^9 + 7)$.

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод
4 3

Стандартный вывод
7

Примечания

Для примера из условия имеется 7 вариантов компоновки моста (пробелы добавлены для лучшего восприятия вариантов):

П Т Т П Т П П

П Т Т П П Т П

П Т П Т Т П П

П Т П П Т Т П

П П Т П Т Т П

П П Т Т П Т П

П Т П Т П Т П

Комментарий

При заданных ограничениях задача решается только при помощи комбинаторики с вычислениями по модулю.

Решение

Ниже представлено решение на языке C++.

C++

```cpp
#include<bits/stdc++.h>
#define int long long
using namespace std;
const int INF = 1e18;
const int MOD = 1e9 + 7;
vector<int> f(2e6 + 1, 1);
```

```
int binpow (int a, int n) {
        int res = 1;
        while (n > 0) {
                if (n % 2 == 1)
                        (res *= a) %= MOD;
                (a *= a) %= MOD;
                n /= 2;
        }
        return res;
}

int bc(int n, int k){
    int res = f[n];
    int p1 = binpow(f[k], MOD - 2);
    int p2 = binpow(f[n - k], MOD - 2);
    (res *= p1) %= MOD;
    (res *= p2) %= MOD;
    return res;
}
signed main(){
    for(int i = 1; i <= 2e6; i++){
        f[i] = (f[i - 1] * i) % MOD;
    }
    int a, b;
    int ans = 0;
    cin >> a >> b;
    a--;
    for(int i = 0; i < a + 1; i++){
        if(2 * i <= b){
            int d = bc(a, i);
            if(b - 2 * i <= a - i){
                (d *= bc(a - i, b - 2 * i) ) %= MOD;
                (ans += d) %= MOD;
            }
        }
    }
    cout << ans << endl;
}
```

Задача 2.2.4.5. Джентльмены на прогулке (30 баллов)

Имя входного файла: стандартный ввод или `input.txt`.

Имя выходного файла: стандартный вывод или `output.txt`.

Ограничение по времени выполнения программы: 8 с.

Ограничение по памяти: 64 Мбайт.

Условие

По прямому участку улицы, которую будем считать отрезком AB длины d, прогуливаются n джентльменов. i-й джентльмен движется со скоростью v_i. Скорости всех джентльменов попарно различны. Дойдя до любого конца улицы, каждый джентльмен поворачивает и идет в обратную сторону.

При каждой встрече два джентльмена приветствуют друг друга, приподнимая головной убор. Приветствие происходит и в том случае, когда один джентльмен обгоняет другого. Если два джентльмена встречаются в момент их одновременного поворота, то происходит два приветствия: одно до поворота, другое — после поворота. Если происходит одновременная встреча трех и более джентльменов, то они приветствуют друг друга попарно, то есть каждый каждого. Допустим, если одновременно встретились четыре джентльмена где-то посреди улицы, произойдет шесть попарных приветствий. Если же эти четыре джентльмена встретились в момент их одновременного поворота, произойдет уже двенадцать приветствий.

В этой задаче считаем, что все действия происходят без остановок, то есть и повороты и приветствия происходят мгновенно. Джентльмены одновременно начинают свою прогулку из точки A в момент 0. В этот момент они уже производят свои первые попарные приветствия, то есть в момент 0 уже произведено $n \cdot (n-1)/2$ приветствий. Момент старта не считается моментом поворота, то есть на старте число приветствий не удваивается. Джентльмены гуляют достаточно долго, чтобы произошло любое заданное количество приветствий.

Требуется найти момент, в который было произведено k-е по порядку приветствие.

Формат входных данных

В первой строке ввода через пробел содержится два целых числа: d — длина отрезка AB и n — количество прогуливающихся джентльменов, где $1 \leqslant d \leqslant 200$, $2 \leqslant n \leqslant 2\,000$.

Во второй строке находятся n целых чисел v_i через пробел — скорости каждого джентльмена, где $1 \leqslant v_i \leqslant 2\,000$. Гарантируется, что все скорости попарно различны. Скорости даны в порядке возрастания, то есть $v_1 < v_2 < \ldots < v_n$.

В третьей строке содержится одно целое число k — номер требуемого приветствия, для которого нужно найти момент, когда оно произойдет, где $1 \leqslant k \leqslant 10^9$.

Формат выходных данных

Вывести одно вещественное число — время, когда произойдет k-е по порядку приветствие. Ответ вывести с точностью не менее двух знаков после десятичной точки.

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод
5 4 2 5 8 10 6

Стандартный вывод
0.000

Пример №2

Стандартный ввод
5 4 2 5 8 10 7

Стандартный вывод
0.556

Пример №3

Стандартный ввод
5 4 2 5 8 10 11

Стандартный вывод
1.000

Пример №4

Стандартный ввод
5 4 2 5 8 10 15

Стандартный вывод
1.429

Пример №5

Стандартный ввод
5 4 2 5 8 10 17

Стандартный вывод
1.667

Пример №6

Стандартный ввод
5 4 2 5 8 10 19

Стандартный вывод
1.667

Пример №7

Стандартный ввод

`5 4`
`2 5 8 10`
`21`

Стандартный вывод
`2.000`

Примечания

На рис. 2.2.8 приведено положение джентльменов из примеров в моменты времени 0, 1 и 2. Джентльмены обозначены своими скоростями. Стрелками обозначены направления их движения в соответствующий момент. Перечислим и пронумеруем в порядке возрастания моменты попарных приветствий этих джентльменов до момента времени 2 включительно. Если два и более приветствия происходят одновременно, неважно какое из них конкретно имеет номер k, главное, что они происходят в один и тот же определенный момент времени.

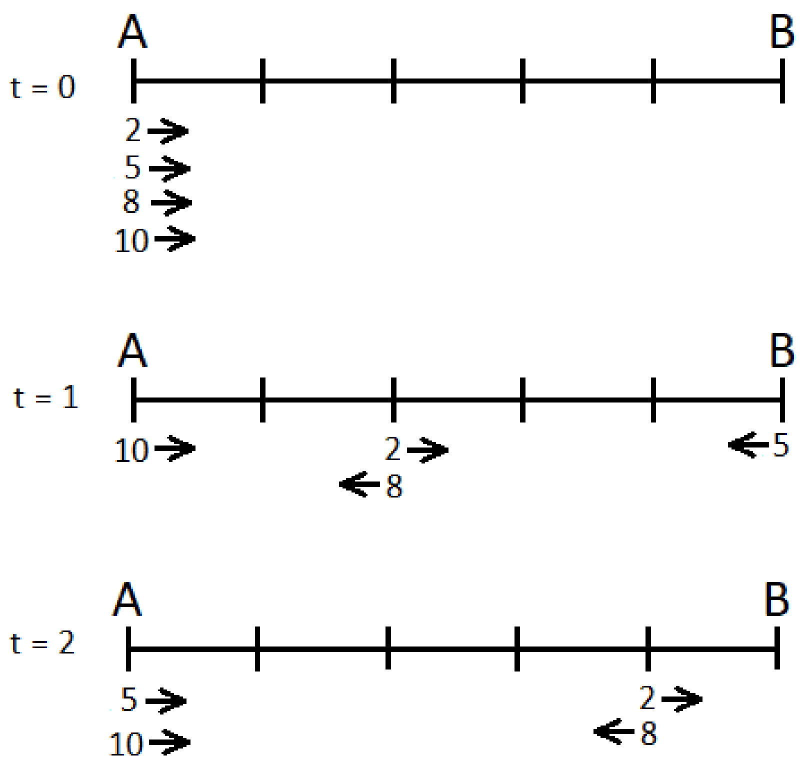


Рис. 2.2.8

1. 2 и 5 приветствуют друг друга в момент 0 (изображено на рис. 2.2.8).
2. 2 и 8 приветствуют друг друга в момент 0 (изображено на рис. 2.2.8).
3. 2 и 10 приветствуют друг друга в момент 0 (изображено на рис. 2.2.8).
4. 5 и 8 приветствуют друг друга в момент 0 (изображено на рис. 2.2.8).
5. 5 и 10 приветствуют друг друга в момент 0 (изображено на рис. 2.2.8).

6. 8 и 10 приветствуют друг друга в момент 0 (изображено на рис. 2.2.8).
7. 8 и 10 приветствуют друг друга в момент 0.556.
8. 5 и 10 приветствуют друг друга в момент 0.667.
9. 5 и 8 приветствуют друг друга в момент 0.769.
10. 2 и 10 приветствуют друг друга в момент 0.833.
11. 2 и 8 приветствуют друг друга в момент 1.000 (изображено на рис. 2.2.8).
12. 8 и 10 приветствуют друг друга в момент 1.111.
13. 2 и 10 приветствуют друг друга в момент 1.250.
14. 5 и 10 приветствуют друг друга в момент 1.333.
15. 2 и 5 приветствуют друг друга в момент 1.429.
16. 5 и 8 приветствуют друг друга в момент 1.538.
17. 2 и 8 приветствуют друг друга в момент 1.667.
18. 2 и 10 приветствуют друг друга в момент 1.667.
19. 8 и 10 приветствуют друг друга в момент 1.667 (в момент 1.667 встретятся одновременно три джентльмена 2, 8 и 10).
20. 2 и 8 приветствуют друг друга в момент 2.000 (изображено на рис. 2.2.8).
21. 5 и 10 приветствуют друг друга в момент 2.000 (до поворота).
22. 5 и 10 приветствуют друг друга в момент 2.000 (после поворота, изображено на рис. 2.2.8).

Комментарий

Задача решается при помощи бинпоиска с квадратичным нахождением ответа в каждой его итерации.

Решение

Ниже представлено решение на языке C++.

C++

```cpp
#include<bits/stdc++.h>
#define int long long
using namespace std;
const double EPS = 1e-7;
double x(double M, int V, int d){
    double dst = V * M;
    int cnt = floor((dst + EPS) / d);
    double pin = dst - cnt * d;
    if(cnt % 2 == 0){
        return pin;
    }
    else{
        return d - pin;
    }
}
int F(double M, vector<int> &v, int d){
    int res = 0;
    for(int i = 0; i < v.size(); i++){
        double dst = v[i] * M;
```

```cpp
            int cnt = floor((dst + EPS) / d);
            res += cnt * i;
            double tx = x(M, v[i], d);
            for(int j = 0; j < i; j++){
                double txj = x(M, v[j], d);
                if(cnt % 2 == 0){
                    res += txj <= tx + EPS;
                }
                else{
                    res += txj >= tx - EPS;
                }
            }
        }
        return res;
    }
signed main(){
    int d, n;
    cin >> d >> n;
    vector<int> v(n);
    for(int i = 0; i < n; i++){
        cin >> v[i];
    }
    int k;
    cin >> k;
    double L = 0, R = 1;
    while(F(R, v, d) <= k){
        R *= 2;
    }
    R *= 2;
    while(R - L > 1e-4){
        double M = (R + L) / 2.0;
        if(F(M, v, d) < k){
            L = M;
        }
        else{
            R = M;
        }
    }
    cout.precision(10);
    cout << fixed << L << endl;
}
```

2.3. Предметный тур. Физика

2.3.1. Первая волна. Задачи 8–9 класса

Задачи первой волны предметного тура по по физике за 8–9 класс открыты для решения. Соревнование доступно на платформе Яндекс.Контест: https://contest.yandex.ru/contest/63463/enter/.

Задача 2.3.1.1. Калориметр (10 баллов)

Условие

Внутренний стакан калориметра представляет собой цилиндр с радиусом $R = 8$ см и высотой $3R$. Внешний стакан также имеет форму цилиндра, стенки которого (как боковые, так и торцы) отстоят от стенок внутреннего на расстояние R. Какая масса теплоизоляционного материала с плотностью $\rho = 25$ кг/м^3 необходима, чтобы полностью заполнить пространство между стаканами?

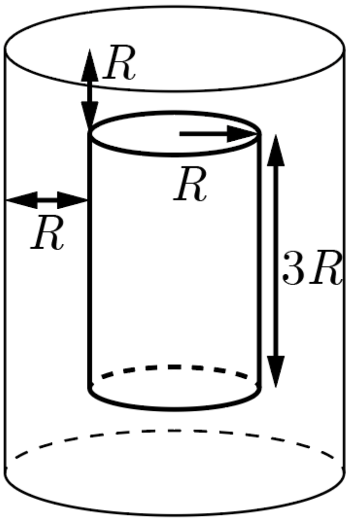


Рис. 2.3.1

Решение

Чтобы найти массу m теплоизоляционного материала, необходимо его плотность умножить на занимаемый им объем V:

$$m = \rho V. \tag{2.3.1}$$

Объем области, заполняемой теплоизоляцией, удобнее всего найти, вычтя из объема V_1 большого внешнего стакана объем V_2 маленького внутреннего. Для любого кругового цилиндра с высотой h и радиусом r объем может быть найден по формуле $V = \pi r^2 h$. В случае большого цилиндра $r = 2R$ и $h = 5R$, следовательно,

$$V_1 = 5R \cdot \pi(2R)^2 = 20\pi R^3. \tag{2.3.2}$$

Аналогично, для маленького $r = R$, $h = 3R$ и, следовательно,

$$V_2 = 3\pi R^3. \tag{2.3.3}$$

Подставляя (2.3.2), (2.3.3) в (2.3.1), получим, что искомая масса составляет:

$$m = \rho(V_1 - V_2) = 17\pi R^3 \rho \approx 0{,}68\,\text{кг}. \tag{2.3.4}$$

Погрешность 0,01 кг.

Ответ: $m = 17\pi R^3 \rho = (0{,}68 \pm 0{,}01)\,\text{кг}$.

Задача 2.3.1.2. Нить накала (15 баллов)

Условие

Нити накала ламп изготавливают из вольфрама, удельное сопротивление которого сильно зависит от температуры. По мере прогрева нити оно возрастает от $\rho_0 = 5{,}5 \cdot 10^{-8}\,\text{Ом} \cdot \text{м}$ до $\rho_1 = 1{,}1 \cdot 10^{-6}\,\text{Ом} \cdot \text{м}$. Определите электрическую мощность, потребляемую лампой в первый момент после ее включения, если в рабочем режиме (полностью прогревшись) лампа потребляет от той же сети мощность $P_1 = 30\,\text{Вт}$.

Решение

Электрическая мощность P, потребляемая нитью накала, может быть вычислена по закону Джоуля – Ленца, который для фиксированного напряжения U в сети удобно записать как

$$P = U^2/R. \tag{2.3.5}$$

При этом сопротивление R нити легко выразить через ее удельное сопротивление ρ, длину l и площадь поперечного сечения S

$$R = \frac{\rho l}{S}. \tag{2.3.6}$$

Подставляя (2.3.6) в (2.3.5), получим

$$P = \frac{U^2 S}{\rho l},$$

где только ρ зависит от температуры. В результате придем к выводу, что выделяющаяся в лампе мощность обратно пропорциональна ее удельному сопротивлению, откуда окончательно следует

$$P_0 = P_1 \frac{\rho_1}{\rho_0} \approx 600\,\text{Вт}.$$

Погрешность 1 Вт.

Ответ: $P_0 = (600 \pm 1)\,\text{Вт}$.

Задача 2.3.1.3. Свая (20 баллов)

Условие

Бетонная свая высотой $h = 1{,}4\,\text{м}$ и массой $m = 160\,\text{кг}$ полностью погружена в грунт так, что ее верхний торец совпадает с уровнем почвы. К сожалению, сваю понадобилось извлечь. Определите, какую работу для этого необходимо совершить, если сила трения со стороны грунта, действующая на сваю, прямо пропорциональна площади соприкосновения ее боковой стороны с землей и в начальный момент ее извлечения равна $F = 4\,\text{кН}$. Ускорение свободного падения $g \approx 9{,}8\,\text{м/с}^2$.

Решение

Работа A, необходимая для извлечения сваи, складывается из увеличения потенциальной энергии сваи на величину mgh и работы по преодолению силы трения $A_{\text{тр}}$. Последняя должна быть найдена с учетом постепенного уменьшения силы трения $F_{\text{тр}}$ от максимального значения F до нуля. Поскольку это уменьшение происходит линейно, общая работа оказывается строго вдвое меньше, чем при постоянном значении $F_{\text{тр}} = F$ (аналогично тому, как вычисляется значение работы сил упругости пружины). В результате

$$A = mgh + \frac{Fh}{2} \approx 5\,\text{кДж}. \tag{2.3.7}$$

Погрешность $0{,}1\,\text{кДж}$.

Ответ: $(5{,}0 \pm 0{,}1)\,\text{кДж}$.

Задача 2.3.1.4. Двое из ларца (25 баллов)

Условие

Два дрона одновременно вылетают с общей пусковой станции и движутся по прямолинейным траекториям. Первый дрон на начальном этапе движения перемещается с постоянной скоростью $v_1 = 15\,\text{м/с}$, а через время $\tau = 40\,\text{с}$ быстро переключается на движение с постоянной скоростью $v_2 = 20\,\text{м/с}$. Второй дрон — наоборот, сначала движется со скоростью v_2, а через время τ переключается на скорость v_1. Наконец, дроны одновременно заканчивают полет. Определите, как долго длился этот полет, если по его итогам средняя путевая скорость первого дрона оказалась на $\Delta v = 1\,\text{м/с}$ выше, чем средняя путевая скорость второго.

Решение

По определению средняя путевая скорость — это отношение общего пройденного пути S к общему времени движения t:

$$v = \frac{S}{t}. \tag{2.3.8}$$

Для первого дрона это уравнение принимает вид

$$v_a = \frac{v_1\tau + v_2(t-\tau)}{t}, \tag{2.3.9}$$

а для второго, соответственно,

$$v_b = \frac{v_2\tau + v_1(t-\tau)}{t}. \tag{2.3.10}$$

Из условий задачи известно, что $v_a - v_b = \Delta v$. Подставляя в это уравнение формулы (2.3.9) и (2.3.10), а также домножая его на t, получим

$$v_1\tau + v_2(t-\tau) - v_2\tau - v_1(t-\tau) = \Delta v t. \tag{2.3.11}$$

Перегруппировав слагаемые, получим

$$v_2 t - 2v_2\tau - v_1 t + 2v_1\tau = \Delta v t, \tag{2.3.12}$$

откуда окончательно

$$t = \frac{2(v_2 - v_1)\tau}{v_2 - v_1 - \Delta v} = 100\,\text{с}. \tag{2.3.13}$$

Погрешность 1 с.

Ответ: (100 ± 1) с.

Задача 2.3.1.5. Призма (30 баллов)

Условие

Для тонкого контроля параметров призмы используется следующая установка: отмечается точка, в которую падает лазерный луч, направленный на экран строго под прямым углом (пунктирный на рисунке). Затем на пути луча устанавливается исследуемая призма так, что задняя (первая по ходу распространения луча) ее грань оказывается строго перпендикулярна лучу, и измеряется расстояние d, на которое в результате этого смещается пятно лазера.

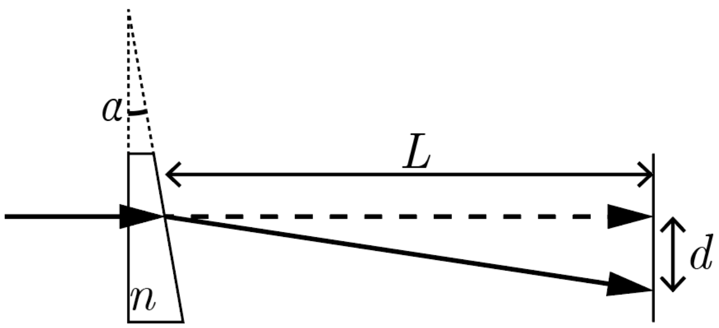


Рис. 2.3.2

Определите показатель преломления стекла, из которого изготовлена призма, если расстояние от передней грани призмы до экрана $L = 3$ м, смещение пятна при установке призмы $d = 12$ см, а угол между передней и задней поверхностями призмы $\alpha = 3°$. Используйте приближение малых углов.

Решение

На первой по ходу распространения луча грани призмы свет не преломляется, поскольку падает на нее под прямым углом. Следовательно, угол падения луча на переднюю грань призмы равен α. Тогда по закону Снеллиуса

$$n = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}, \tag{2.3.14}$$

где β — угол преломления луча, что с учетом приближения малых углов $\sin\alpha \approx \alpha \approx$ $\approx \operatorname{tg}\alpha$ (в радианах) принимает форму

$$n \approx \frac{\beta}{\alpha}. \tag{2.3.15}$$

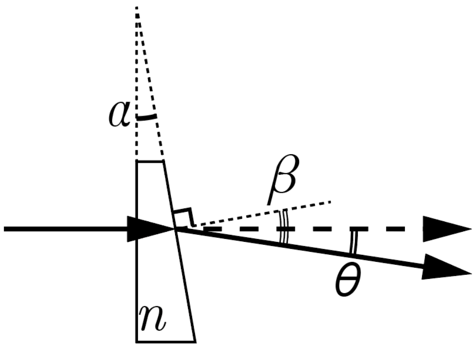


Рис. 2.3.3

Из геометрии рисунка легко видеть, что $\beta = \alpha + \theta$, где θ — угол, который преломленный луч составляет с направлением своего распространения до установки призмы. При этом $\operatorname{tg}\theta = \frac{d}{L}$, откуда

$$n\alpha \approx \beta = \alpha + \operatorname{arctg}\frac{d}{L} \Rightarrow n \approx 1 + \frac{d}{\alpha L} \approx 1{,}76. \tag{2.3.16}$$

Погрешность 0,02.

Ответ: $1{,}76 \pm 0{,}02$.

2.3.2. Первая волна. Задачи 10–11 класса

Задачи первой волны предметного тура по физике за 10–11 класс открыты для решения. Соревнование доступно на платформе Яндекс.Контест: https://contest.yandex.ru/contest/63480/enter/.

Задача 2.3.2.1. Беспилотник (10 баллов)

Условие

Беспилотник, двигаясь равномерно и прямолинейно и обладая при этом импульсом $p_0 = 10^4$ кг $\cdot$ м/с, преодолевает дистанцию $L = 20$ км ровно за 1,5 мин. За какое время преодолеет ее этот же беспилотник, двигаясь также равномерно и прямолинейно, но обладая на $\Delta p = 10^3$ кг $\cdot$ м/с меньшим импульсом?

Решение

Импульс p тела — это произведение его массы на его скорость, поэтому скорость беспилотника легко может быть вычислена как

$$p_0 = \frac{mL}{t_0}, \tag{2.3.17}$$

где t_0 — время в пути с импульсом p_0. Искомое время t можно аналогично выразить через скорость v беспилотника во второй рассмотренной ситуации как

$$t = \frac{L}{v} = \frac{Lm}{p_0 - \Delta p}. \tag{2.3.18}$$

Выражая массу беспилотника из 2.3.17 и подставляя ее в 2.3.18, получим:

$$t = \frac{\cancel{L} p_0 t_0}{\cancel{L}(p_0 - \Delta p)} = 100\,\text{с}. \tag{2.3.19}$$

Погрешность 1 с.

Ответ: (100 ± 1) с.

Задача 2.3.2.2. Грузовик (15 баллов)

Условие

На плоское горизонтальное дно кузова транспортного грузовика погрузили большой грузовой контейнер и забыли его закрепить. Благодаря силе трения контейнер оставался в покое относительно грузовика до тех пор, пока ускорение последнего не превосходило $a_0 = 2{,}0$ м/с^2, и начинал скользить при превышении этого значения. Совершая маневр, грузовик приобрел ускорение $a = 2{,}12$ м/с^2, направленное по ходу движения. Какое время длился маневр, если в результате контейнер сдвинулся на $l = 1{,}5$ м относительно грузовика?

Решение

Исходя из того, что контейнер остается на месте при ускорении грузовика до a_0, можно, по второму закону Ньютона, заключить, что сила трения покоя, обеспечивающая это ускорение для контейнера, не превышает значения

$$F = ma_0, \tag{2.3.20}$$

где m — масса контейнера. При любом маневре, при котором контейнер начинает скользить, на него действует сила трения скольжения, равная F и, следовательно, его ускорение относительно дороги оказывается равно a_0.

Во время маневра ускорение контейнера относительно грузовика равно (по модулю) $a - a_0$, а пройденное контейнером относительно грузовика расстояние может быть выражено по законам кинематики как

$$l = \frac{(a - a_0)t^2}{2}, \qquad (2.3.21)$$

где t — искомое в задаче время. Преобразуя эту формулу, получим

$$t = \sqrt{\frac{2l}{a - a_0}} = 5\,\text{с}. \qquad (2.3.22)$$

Погрешность 0,1 с.

Ответ: $(5{,}0 \pm 0{,}1)$ с.

Задача 2.3.2.3. Методичка (20 баллов)

Условие

На лабораторной работе по физике в распоряжении школьников оказались резисторы двух номиналов: с сопротивлениями x и y кОм, а также конденсаторы двух номиналов: с емкостями x и y мкФ, при этом $x > y$. В старой методичке, посвященной этой лабораторной работе, была изображена схема, приведенная на рисунке, чернила на которой сильно затерлись. В результате Витя решил, что изображенные элементы являются резисторами, и, соединив их согласно схеме, получил элемент с эквивалентным сопротивлением $R = 5$ кОм. Таня же решила, что это конденсаторы и, соединив их, получила элемент с эквивалентной емкостью $C = 2$ мкФ. Определите, чему равнялось число y.

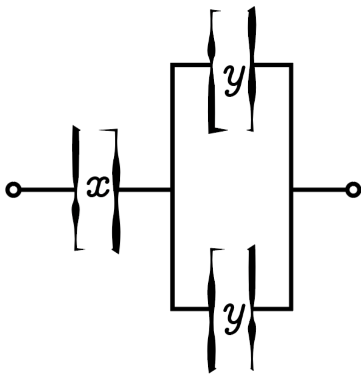


Рис. 2.3.4

Решение

При последовательном соединении резисторов их сопротивления складываются, а при параллельном — складываются обратные сопротивлениям величины. Поэтому сопротивление R схемы Вити через числа x и y в килоомах (кОм) может быть выражено по формуле

$$R = x + \frac{y}{2}. \qquad (2.3.23)$$

Для конденсаторов правила поиска эквивалентной емкости при их последовательном и параллельном соединениях в точности обратные, поэтому емкость схемы Тани может быть выражена в микрофарадах (мкФ) по формуле

$$C = \frac{2xy}{x+2y}. \tag{2.3.24}$$

Выразим x из уравнения (2.3.23) и подставим в (2.3.24):

$$C = \frac{2(R-y/2)y}{R+3y/2}. \tag{2.3.25}$$

Домножив полученное уравнение на знаменатель дроби и раскрыв скобки, получим

$$RC + \frac{3Cy}{2} = 2Ry - y^2. \tag{2.3.26}$$

Поскольку величины x и y имеют разную размерность в разных частях задачи, имеет смысл сразу перейти к численным значениям

$$10 + 3y = 10y - y^2. \tag{2.3.27}$$

Это квадратное уравнение, которое легко привести к канонической форме

$$y^2 - 7y + 10 = 0 \tag{2.3.28}$$

и решить с помощью дискриминанта

$$y_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2}. \tag{2.3.29}$$

Снова воспользовавшись уравнением (2.3.23), легко определить, что при $y = 5$ (корень квадратного уравнения с плюсом) $x = 2{,}5$, что не удовлетворяет условию $x > y$. В то же время, при $y = 2$ (корень с минусом) $x = 4$, что удовлетворяет этому условию. Стало быть, верный корень — $y = 2$.

Погрешность 0,1.

Ответ: $2{,}0 \pm 0{,}1$.

Задача 2.3.2.4. Морозилка (25 баллов)

Условие

Морозильная установка работает по циклу Карно, обходимому в обратном направлении. Какую работу должна потребить такая установка, чтобы заморозить $m = 0{,}4$ кг воды, взятой при ее температуре замерзания, передав полученную от нее теплоту в помещение, температура θ которого равна 30 °C? Удельная теплота плавления и кристаллизации воды $\lambda = 333$ кДж/кг, абсолютный ноль температур $T_0 = -273$ °C.

Решение

Идеальный тепловой двигатель (машина Карно) работает, как известно, по циклу, состоящему из двух изотерм и двух адиабат, и имеет КПД

$$\eta = \frac{T_2 - T_1}{T_2}, \tag{2.3.30}$$

где T_1 — минимальная, а T_2 — максимальная температуры в цикле. По определению КПД тепловой машины он равен отношению работы A, совершаемой газом за цикл, к теплоте Q_2, получаемой им от нагревателя

$$\frac{T_2 - T_1}{T_2} = \eta = \frac{A}{Q_2}. \tag{2.3.31}$$

Отсюда Q_2 может быть выражено как

$$Q_2 = \frac{AT_2}{T_2 - T_1}. \tag{2.3.32}$$

Поскольку за полный цикл внутренняя энергия не изменяется, количество теплоты Q_1, которую газ отдает холодильнику такой машины, равна разнице

$$Q_1 = Q_2 - A = \frac{AT_1}{T_2 - T_1}. \tag{2.3.33}$$

В рассматриваемой задаче тепловой двигатель заменен холодильной машиной, для чего его цикл необходимо обходить в обратном направлении. При этом тепловой резервуар с температурой T_2 начинает получать тепло, а с температурой T_1 — отдавать, но по модулю количества теплоты, которыми газ обменивается с этими тепловыми резервуарами, не изменяются. Остается заметить, что в описанной в условиях холодильной машине $T_1 = 0\,^\circ\mathrm{C} = 273\,\mathrm{K}$, $T_2 = \theta$, $Q_1 = \lambda m$, поскольку забираемая у теплового резервуара с меньшей температурой теплота идет на замораживание в нем воды. Подставив эти данные в (2.3.33), получим

$$\lambda m = \frac{AT_1}{\theta - T_1}, \tag{2.3.34}$$

откуда окончательно выразим ответ

$$A = \frac{\lambda m(\theta - T_1)}{T_1} \approx 14{,}6\,\text{Дж}. \tag{2.3.35}$$

Погрешность: 0,5 Дж.

Ответ: $(14{,}6 \pm 0{,}5)$ Дж.

Задача 2.3.2.5. Электромагнит (30 баллов)

Условие

Для большого промышленного электромагнита критически важной стала проблема охлаждения. Было установлено, что при пропускании через электромагнит тока $I_1 = 10$ А он нагревается до температуры $t_1 = 70\,^\circ$C, после чего перестает увеличивать свою температуру, а при пропускании через него тока $I_2 = 20$ А — до температуры $t_2 = 205\,^\circ$C.

Определите температуру θ в помещении цеха, в котором используется электромагнит, если известно, что основным механизмом, отвечающим за охлаждение магнита, выступает теплопроводность, мощность которой прямо пропорциональна разнице температур между телами, обменивающимися теплом.

Решение

Как указано в условиях, мощность теплопроводности прямо пропорциональна разнице температур между магнитом и окружающим его воздухом в помещении цеха. Обозначим коэффциент этой пропорциональности κ

$$\begin{cases} P_1 = \kappa(\theta - t_1), \\ P_2 = \kappa(\theta - t_2). \end{cases} \tag{2.3.36}$$

Повышение температуры останавливается, когда мощность производимого катушкой тепла и мощность тепла, уходящего от катушки, благодаря теплообмену, оказываются равны. Первую можно выразить из закона Джоуля – Ленца

$$\begin{cases} P_1 = I_1^2 R, \\ P_2 = I_2^2 R, \end{cases} \tag{2.3.37}$$

где R — сопротивление катушки.

Разделим друг на друга уравнения системы (2.3.36) и уравнения системы (2.3.37), а затем приравняем эти отношения:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\theta - t_1}{\theta - t_2} = \frac{I_1^2}{I_2^2}. \tag{2.3.38}$$

Тривиальными алгебраическими преобразованиями выразим θ

$$(\theta - t_1)I_2^2 = (\theta - t_2)I_1^2 \Rightarrow \theta = \frac{t_1 I_2^2 - t_2 I_1^2}{I_2^2 - I_1^2} = 25\,^\circ\text{C}. \tag{2.3.39}$$

Погрешность: $0{,}1\,^\circ$C.

Ответ: $(25{,}0 \pm 0{,}1)$.

2.3.3. Вторая волна. Задачи 8–9 класса

Задачи второй волны предметного тура по физике за 8–9 класс открыты для решения. Соревнование доступно на платформе Яндекс.Контест: https://contest.yandex.ru/contest/63464/enter/.

Задача 2.3.3.1. Аккумулятор тепла (10 баллов)

Условие

Для печи отопления требуется разработать аккумулятор тепла, представляющий собой емкость фиксированного объема, заполненную тем или иным минералом. Используя таблицу 2.3.1 плотностей ρ и удельных теплоемкостей $c_{\text{уд}}$ различных подходящих для этого пород, расположите их в порядке увеличения количества теплоты, которое может быть запасено в таком аккумуляторе при его нагреве до одной и той же температуры θ. Считайте, что θ заведомо меньше температур, при которых любой из этих минералов начнет плавиться или химически разрушаться, а тепловое расширение этих минералов при нагреве до θ пренебрежимо мало.

Таблица 2.3.1. Плотности и удельные теплоемкости

	Минерал	ρ, г/см^3	$c_{\text{уд}}$, кДж/(кг · °C)
A	Кварц	2,6	0,75
B	Базальт	2,8	0,85
C	Талькохлорит	2,75	0,98
D	Нефрит	3	1,1
E	Порфирит	1,45	0,83

Введите в поле ответа последовательность букв, соответствующих выбранным минералам, без пробелов, от наименьшего к наибольшему количеству запасаемой теплоты.

Решение

Количество тепла Q, которое может быть запасено в тепловом аккумуляторе фиксированного объема V, удобно выразить через массу m материала этого аккумулятора

$$Q = c_{\text{уд}} m(\theta - t_0), \tag{2.3.40}$$

где t_0 — начальная температура теплоаккумулятора. В свою очередь, масса m элементарно выражается через плотность вещества и объем V

$$m = \rho V, \tag{2.3.41}$$

откуда

$$Q = c_{\text{уд}} \rho V(\theta - t_0). \tag{2.3.42}$$

Поскольку величины V, θ, t_0 независимы от выбранного вещества, задача сводится к расположению в порядке возрастания произведений $c_{\text{уд}}\rho$. Найдем эти произведения для всей таблицы 2.3.1.

Таблица 2.3.2

	Минерал	ρ, г/см^3	$c_{\text{уд}}$, кДж/(кг · °C)	$c_{\text{уд}}\rho$, кДж/(м^3 · °C)
A	Кварц	2,6	0,75	1 950
B	Базальт	2,8	0,85	2 380
C	Талькохлорит	2,75	0,98	2 695
D	Нефрит	3	1,1	3 300
E	Порфирит	1,45	0,83	1 204

Ответ: EABCD.

Задача 2.3.3.2. Изображения (15 баллов)

Условие

Тонкая собирающая линза имеет фокусное расстояние $F = 20$ см. Вдоль ее оптической оси перед линзой расположено плоское зеркало, на расстоянии $h = 2$ см от которого и $d = 60$ см от линзы размещен светодиод S (рис. 2.3.5). Найдите расстояние между двумя действительными изображениями светодиода, формируемыми этой оптической системой.

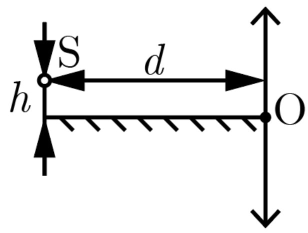


Рис. 2.3.5

Решение

Зеркало формирует мнимое изображение S_1 источника, расположенное в противоположном от него полупространстве на таком же расстоянии от зеркала, как и сам источник. В силу перпендикулярности зеркала и линзы, это мнимое изображение также окажется на расстоянии d от плоскости линзы. Далее линза формирует два действительных изображения: одно непосредственно от источника S (на рис. 2.3.6 оно обозначено S_2) и другое — от его мнимого изображения S_1 (S_3 на рисунке).

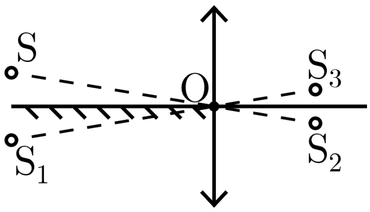


Рис. 2.3.6

Расстояние f, на котором находятся оба действительных изображения от плоскости линзы, легко найти по формуле тонкой линзы

$$\frac{1}{f}+\frac{1}{d}=\frac{1}{F}\Rightarrow f=\frac{Fd}{d-F}. \tag{2.3.43}$$

Искомое расстояние l между изображениями S_2 и S_3, благодаря подобию треугольников $\triangle \mathrm{OSS_1}$ и $\triangle \mathrm{OS_2S_3}$, относится к расстоянию $2h$ между источником и его мнимым изображением S_1 так же, как расстояния от соответствующих изображений и источников до плоскости линзы, являющиеся высотами указанных треугольников

$$\frac{l}{2h}=\frac{f}{d}=\frac{F}{d-F}. \tag{2.3.44}$$

Отсюда окончательно находим

$$l=2h\frac{F}{d-F}=2\,\text{см}. \tag{2.3.45}$$

Погрешность 0,1 см.

Ответ: $l=(2{,}0\pm 0{,}1)$ см.

Задача 2.3.3.3. Пила (30 баллов)

Условие

Циркулярная пила представляет собой пильный диск диаметром $D=19$ см, вращающийся с частотой 4 500 об/мин. Определите среднюю силу сопротивления заготовки вращению полотна пилы, если за один пропил, длившийся $t=3$ с, выделилось $Q=5$ кДж тепла, а пила соприкасалась с заготовкой только узкой полоской своей внешней кромки.

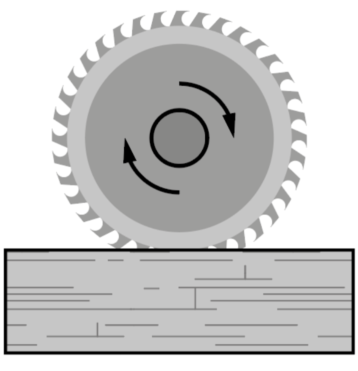


Рис. 2.3.7

Решение

При вращении пилы диссипативные силы (трения различных типов) переводят механическую энергию пильного диска в тепловую. При этом количество выделяющегося тепла равно по модулю работе A этих сил. Последнюю легко найти из ее определения

$$A = FS = Fvt, \qquad (2.3.46)$$

где S — путь точек соприкосновения диска с заготовкой, v — скорость этих точек. При вращении диска скорость точек его кромки удобно выразить через период вращения T этого диска

$$v = \frac{\pi D}{T} = \pi D\nu, \qquad (2.3.47)$$

где ν — частота вращения диска в оборотах в секунду. Подставляя (2.3.47) в (2.3.46) и учитывая $Q = A$, получим окончательно

$$Q = \pi F D\nu t \Rightarrow F = \frac{Q}{\pi D\nu t} \approx 37\,\text{Н}. \qquad (2.3.48)$$

Погрешность 1 Н.

Ответ: $F = (37 \pm 1)\,\text{Н}$.

Задача 2.3.3.4. Питстоп (25 баллов)

Условие

Транспортный робот перемещается из города A в город B, двигаясь практически все время с некоторой постоянной скоростью v. Однако один раз за маршрут ему необходима остановка для заправки и краткого технического обслуживания. Инженеры установили, что при уменьшении длительности этой остановки вдвое скорость движения робота на остальной части маршрута можно будет снизить на $\delta = 10\%$, сохранив при этом его среднюю путевую скорость, что поможет повысить безопасность и экономичность движения. Определите, на сколько процентов (от исходного значения) удалось бы снизить скорость v без изменения средней путевой, если бы от технической остановки удалось полностью отказаться?

Решение

Средняя путевая скорость определяется как отношение всего пути ко всему времени, которое этот путь занимает. Поскольку расстояние между городами неизменно, сохранение средней путевой скорости означает и сохранение общего времени в пути (включая остановку). Следовательно, уменьшение длительности остановки на Δt эквивалентно увеличению времени непосредственного движения на ту же величину. Обозначим общее время робота в пути t, исходную длительность его остановки τ, а исходную скорость движения v_0. Тогда путь робота может быть выражен до и после снижения времени остановки как

$$S = v_0(t - \tau) = v_0(1 - \delta)\left(t - \frac{\tau}{2}\right). \qquad (2.3.49)$$

Сократив v_0 и перегруппировав слагаемые, получим

$$\delta t = \tau\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{\delta}{2}\right) = \tau\frac{\delta+1}{2}. \tag{2.3.50}$$

Полностью избавившись от остановки, таким образом, робот будет двигаться в течение времени

$$t = \tau\frac{\delta+1}{2\delta}. \tag{2.3.51}$$

Аналогично, время движения $t-\tau$ при наличии остановки удобно записать как

$$t - \tau = \tau\left(\frac{\delta+1}{2\delta} - 1\right) = \tau\frac{1-\delta}{2\delta}. \tag{2.3.52}$$

Обозначив v_1 скорость, которой можно добиться, исключив остановку, запишем через эти выражения путь и приравняем его в случаях с остановкой и без

$$v_1 t = v_0(t-\tau) \Rightarrow v_1\tau\frac{\delta+1}{2\delta} = v_0\tau\frac{1-\delta}{2\delta}. \tag{2.3.53}$$

Отсюда окончательно

$$\frac{v_1}{v_0} = \frac{1-\delta}{1+\delta} \approx 0{,}818. \tag{2.3.54}$$

Итого скорость движения без остановки может составлять приблизительно 81,8% от исходной скорости, то есть ниже ее на 18,2%.

Погрешность 0,5%.

Ответ: $(18{,}2 \pm 0{,}5)\%$.

Задача 2.3.3.5. Сцепка (30 баллов)

Условие

Два абсолютно одинаковых ползунковых реостата, сопротивления которых могут изменяться в пределах от 0 до $R_0 = 2$ кОм, размещены параллельно на печатной плате и соединены как изображено на рис. 2.3.8. Из-за ошибки в процессе пайки изоляция их ползунков слиплась таким образом, что ползунки всегда занимают одно и то же положение на обоих реостатах, но электрический контакт между ними отсутствует (это соединение обозначено на рисунке пунктиром). Найдите разницу между максимальным и минимальным сопротивлениями полученной батареи.

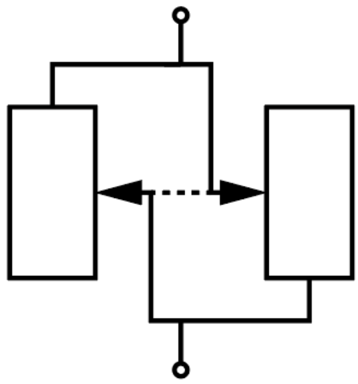


Рис. 2.3.8

Решение

Реостаты на схеме соединены параллельно, поэтому общее сопротивление схемы R может быть выражено через сопротивления $R_{1,2}$ каждого из реостатов по формуле

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \tag{2.3.55}$$

Несложно видеть из схемы, что когда ползунок находится в крайнем верхнем положении, левый реостат имеет нулевое сопротивление, а правый — сопротивление R_0 и наоборот. Величина сопротивления находится в линейной зависимости от длины провода. Из этого можно заключить, что при любом положении ползунка

$$R_2 = R_0 - R_1. \tag{2.3.56}$$

Подставляя этот результат в (2.3.55), получим

$$R = \frac{R_1(R_0 - R_1)}{R_0} = R_1 - \frac{R_1^2}{R_0}. \tag{2.3.57}$$

График полученной функции является параболой. Его минимумы и максимумы могут лежать либо на границах диапазона изменения R_1, либо в вершине соответствующей параболы. Поскольку коэффициент перед квадратным слагаемым отрицательный, парабола «повернута» ветвями вниз, то есть на границах диапазона (при $R_1 = 0$ или $R_1 = R_0$) сопротивления батареи минимальны и равны 0, а в ее вершине (которая, как легко видеть из симметрии или непосредственно по формуле $x_{max} = -b/(2a)$, лежит в центре диапазона, при $R_1 = R_2 = \frac{R_0}{2}$) сопротивление батареи равно $\frac{R_0}{4}$.

Таким образом,

$$R_{max} - R_{min} = \frac{R_0}{4} - 0 = \frac{R_0}{4} = 0{,}5\,\text{кОм}. \tag{2.3.58}$$

Погрешность $0{,}01$ кОм.

Ответ: $l = (0{,}50 \pm 0{,}01)$ кОм.

2.3.4. Вторая волна. Задачи 10–11 класса

Задачи второй волны предметного тура по по физике за 10–11 класс открыты для решения. Соревнование доступно на платформе Яндекс.Контест: https://contest.yandex.ru/contest/63481/enter/.

Задача 2.3.4.1. Зарядка (10 баллов)

Условие

Для увеличения ресурса аккумулятора его зарядка происходит по специальной программе, учитывающей внешние условия, интенсивность использования прибора и другие факторы. Рассчитав оптимальный режим, зарядное устройство в течении $\tau = 10$ мин подавало на аккумулятор ток, линейно возраставший со временем от нуля до максимального значения $I_0 = 3$ А, затем в течение $2{,}5\tau$ поддерживало постоянное значение этого тока и, наконец, на протяжении $\tau/2$, также линейно опускало ток от максимального значения до нуля. Какой общий заряд поступил на положительную клемму аккумулятора за все это время?

Решение

Один из способов решения задачи состоит в обнаружении аналогии между током и движением. Подобно тому, как скорость описывает темп изменения координаты, сила тока описывает темп поступления заряда на аккумулятор. Из кинематики известно, что при равномерном увеличении этого темпа (равноускоренном движении) от нуля, либо при равномерном снижении этого темпа (равнозамедленном движении) до нуля тело проходит вдвое меньшее расстояние, чем при движении с постоянной скоростью, равной максимальной на рассматриваемом участке. Применяя этот результат к току, заметим, что за время $2{,}5\tau$ постоянного тока зарядки на аккумулятор поступил заряд

$$q_1 = 2{,}5\tau I_0, \tag{2.3.59}$$

а за общее время $1{,}5\tau$ увеличения и уменьшения силы тока — заряд

$$q_2 = \frac{1{,}5\tau I_0}{2} = 0{,}75\tau I_0. \tag{2.3.60}$$

Складывая эти заряды, получим окончательно

$$q = 3{,}25\tau I_0 = 5850\,\text{Кл}. \tag{2.3.61}$$

Задача также может быть решена графически, изображением зависимости $I(t)$ и вычислением площади под ней. Фактически такое решение также является применением аналогии, но геометрической, а не кинематической.

Погрешность 50 Кл.

Ответ: (5850 ± 50) Кл.

Задача 2.3.4.2. Принтер (15 баллов)

Условие

Печатающая головка 3D-принтера может перемещаться вдоль направляющей (координата x), которая также может смещаться в перпендикулярном направлении (координата y) под действием двух сервоприводов. Для изготовления детали на принтер была передана программа, согласно которой сервоприводы должны перемещать головку по законам $x(t) = 0{,}2\sin(t/10)$; $y(t) = 0{,}1 + 0{,}2\cos(t/10)$, где t — время, а все величины даны в основных единицах СИ. Найдите величину ускорения печатающей головки при выполнении этой программы.

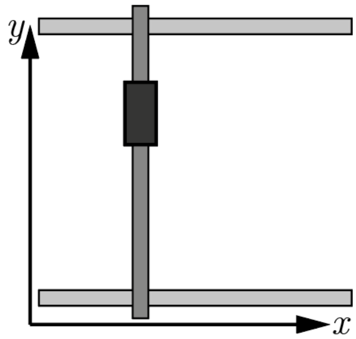


Рис. 2.3.9

Решение

Прежде всего заметим, что уравнения приведенного типа параметрически задают окружность. Это следует из самого определения синуса и косинуса. Радиус R этой окружности равен множителю перед синусом и косинусом (т. к. в математическом определении тригонометрических функций используется единичная окружность), то есть $R = 0{,}2$ м. Здесь было учтено, что основными единицами СИ для измерения длины являются метры.

Поскольку зависимость угла на окружности (аргумента синуса и косинуса) от времени линейна, модуль скорости v печатающей головки постоянен. Чтобы найти его, определим период обращения. Печатающая головка описывает полную окружность, когда аргумент синуса и косинуса меняется на 2π, что происходит при достижении t значения $T = 20\pi$ с. Тогда

$$v = \frac{2\pi R}{T}. \tag{2.3.62}$$

Окончательно заметим, что при неизменной по модулю скорости головки единственное ее ускорение — центростремительное, которое может быть найдено как

$$a = \frac{v^2}{R} = \frac{4\pi^2 R}{T^2} = \frac{4\cancel{\pi^2}\cdot 0{,}2}{400\cancel{\pi^2}} \approx 2\,\text{мм/с}^2. \tag{2.3.63}$$

Погрешность $0{,}1\,\text{мм/с}^2$.

Ответ: $(2{,}0 \pm 0{,}1)\,\text{мм/с}^2$.

Задача 2.3.4.3. Плита (20 баллов)

Условие

Квадратная плита ABCD со стороной $a = 40$ см шарнирно закреплена в одной точке и вращается вокруг оси, перпендикулярной ее плоскости с постоянной угловой скоростью. При этом в некоторый момент времени скорость вершины C этой плиты направлена строго на вершину D, а ускорение вершины A — строго на вершину B (см. рис. 2.3.10). На каком расстоянии от центра пластины находится шарнир?

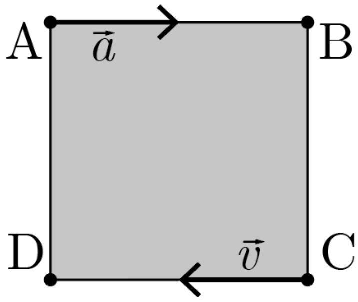


Рис. 2.3.10

Решение

При плоском вращении скорость каждой точки тела направлена перпендикулярно направлению из этой точки на ось вращения, а ускорение (центростремительное) — непосредственно на эту ось. Поэтому, проведя одну прямую через точку C перпендикулярно ее скорости, а другую — через точку A вдоль ее ускорения, можно найти ось вращения как точку пересечения этих прямых. Такой точкой будет, разумеется, вершина B, а расстояние от нее до центра пластины равно

$$l = \frac{\sqrt{2}}{2} a \approx 28{,}3\,\text{см}. \qquad (2.3.64)$$

Погрешность $0{,}5$ см.

Ответ: $(28{,}3 \pm 0{,}5)$ см.

Задача 2.3.4.4. Прямоугольники (25 баллов)

Условие

К проекту модельного теплового двигателя, рабочим телом которого является идеальный одноатомный газ, прилагается pV-диаграмма его рабочего цикла, представляющая собой прямоугольник 1234. К сожалению, автор не указал ни давления, ни объемы характерных точек, а ограничился «площадями» (в энергетических единицах) некоторых прямоугольников на данной диаграмме, которые указаны на рис. 2.3.10. Да к тому же самая важная площадь — площадь внутри цикла 1234, стерлась. Тем не менее определите КПД данного двигателя.

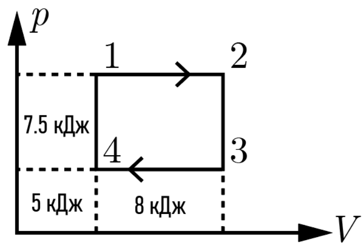


Рис. 2.3.11

Решение

КПД η теплового двигателя определяется как отношение работы A газа за один цикл этого двигателя к количеству теплоты Q, получаемой газом за этот цикл от нагревателя:

$$\eta = \frac{A}{Q}. \tag{2.3.65}$$

Первая — есть площадь прямоугольника 1234. Найти ее просто, если заметить, что поскольку высота (вдоль оси p) у верхних двух прямоугольников одинакова, их площади относятся так же, как и их ширины (вдоль оси V), и то же верно для нижней пары прямоугольников

$$A = 7{,}5\frac{8}{5} = 12\,\text{кДж}. \tag{2.3.66}$$

Чтобы найти теплоту Q, воспользуемся первым началом термодинамики $Q = A + \Delta U$ и заметим, что газ получает теплоту на процессах 41 и 12. Работа за эти два процесса равна полной площади под отрезком 12

$$A_{412} = 12 + 8 = 20\,\text{кДж}, \tag{2.3.67}$$

а внутренняя энергия может быть удобно вычислена по формуле

$$U = \frac{3}{2}PV, \tag{2.3.68}$$

из которой следует, что внутренняя энергия U_4 газа в состоянии 4 равна

$$U_4 = \frac{3}{2}5 = 7{,}5\,\text{кДж}, \tag{2.3.69}$$

поскольку произведение PV для этого состояния есть площадь одного соответствующего прямоугольника. Аналогично, внутренняя энергия U_2 газа в состоянии 2 равна

$$U_2 = \frac{3}{2}(7{,}5 + 12 + 5 + 8) = 48{,}75\,\text{кДж}, \tag{2.3.70}$$

поскольку в этом состоянии соответствующее произведение PV равно общей площади всех прямоугольников на диаграмме.

Подставляя все найденные величины в исходное уравнение (2.3.65), получим окончательно

$$\eta = \frac{A}{A_{412} + U_2 - U_4} = \frac{12}{20 + 48{,}75 - 7{,}5} \approx 19{,}6\%. \tag{2.3.71}$$

Погрешность 1%.

Ответ: $(19{,}6 \pm 1{,}0)\%$

Задача 2.3.4.5. Трюм (30 баллов)

Условие

Трюм грузового судна представляет собой призму с основанием в виде равностороннего треугольника вершиной вниз. Длина внешней стороны треугольника $a = 15$ м, толщина его стенок $d = 1{,}5$ м, длина киля судна (высота призмы) $l = 40$ м. Инженерами было рассчитано, что для сохранения устойчивости судна центр тяжести сыпучего груза, перевозимого в трюме, должен быть хотя бы на $h = 2$ м ниже центра тяжести вытесняемой трюмом воды при его полном погружении. Какой максимальный объем груза можно разместить в трюме, если при насыпании его центр тяжести занимает самое низкое доступное положение?

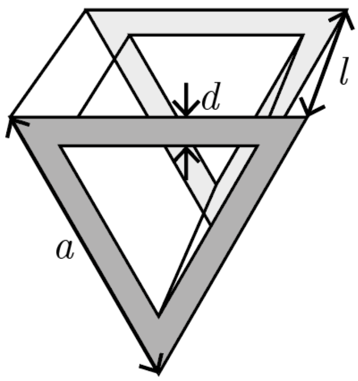


Рис. 2.3.12

Решение

Сыпучий груз занимает объем, форма которого также является призмой с основанием в виде равностороннего треугольника, во всяком случае, при необходимости понизить центр тяжести. В силу симметрии, центр тяжести равностороннего треугольника находится в его геометрическом центре. Поскольку центр тяжести груза должен быть на h ниже, чем центр тяжести вытесненной воды, центр треугольника, формируемого сечением насыпанного груза (темный на рис. 2.3.13), на h ниже центра трюма.

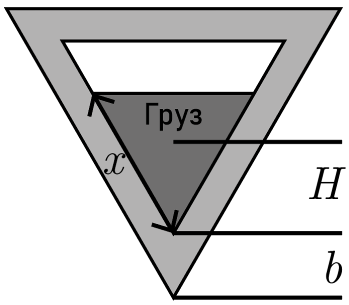


Рис. 2.3.13

Отсчитывая от киля (нижней вершины треугольника) высоту $y_в$, на которой находится центр тяжести вытесненной воды, легко выразить как

$$y_{\text{в}} = \frac{\sqrt{3}}{3}a, \tag{2.3.72}$$

поскольку радиус описанной окружности для равностороннего треугольника в $\sqrt{3}/3$ раз меньше его стороны.

Высота $y_{\text{г}}$ центра тяжести груза может быть найдена как

$$y_{\text{г}} = b + H, \tag{2.3.73}$$

где b — толщина стенки вдоль соответствующего направления (см. рис. 2.3.13), а H — высота центра тяжести груза от нижней внутренней точки трюма. Обе эти величины вычисляются из тригонометрии

$$b = 2d; \quad H = \frac{\sqrt{3}}{3}x, \tag{2.3.74}$$

где x — сторона треугольника, являющегося поперечным сечением груза.

Учитывая $y_{\text{г}} + h = y_{\text{в}}$, получим

$$\frac{\sqrt{3}}{3}x + 2d + h = \frac{\sqrt{3}}{3}a, \tag{2.3.75}$$

откуда

$$x = a - \sqrt{3}(2d + h) \approx 6{,}34\,\text{м}. \tag{2.3.76}$$

Объем, занимаемый грузом при такой длине его стороны, находится как произведение площади равностороннего треугольника на длину киля

$$V = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 l \approx 696\,\text{м}^3. \tag{2.3.77}$$

Погрешность 10 м^3.

Ответ: (696 ± 10) м^3.

2.3.5. Третья волна. Задачи 8–9 класса

Задачи третьей волны предметного тура по физике за 8–9 класс открыты для решения. Соревнование доступно на платформе Яндекс.Контест: https://contest.yandex.ru/contest/63465/enter/.

Задача 2.3.5.1. Башня (10 баллов)

Условие

В гидравлической системе используется башня, заполненная минеральным маслом с плотностью $\rho = 900\,\text{кг/м}^3$. Верхний уровень масла расположен на $h = 60\,\text{м}$ выше, чем смотровое окно в трубе с маслом, закрепленное на ней при помощи $n = 16$ одинаковых болтов. Определите, какую нагрузку должен выдерживать каждый из этих болтов на разрыв, чтобы обеспечить трехкратный запас прочности? Площадь смотрового окна $S = 0{,}1\,\text{м}^2$. Ускорение свободного падения $g = 9{,}8\,\text{м/с}^2$.

Решение

Давление p масла на уровне окна элементарно вычисляется по формуле гидростатического давления

$$p = \rho g h. \tag{2.3.78}$$

Исходя из определения всякого давления p как отношения силы F к площади S, на которую действует эта сила, найдем силу со стороны жидкости, «пытающуюся выдавить» смотровое окно

$$F = pS = \rho g h S. \tag{2.3.79}$$

Искомая рассчетная нагрузка f каждого из болтов может быть получена домножением этой силы на 3 (требуемый запас прочности) и делением на число болтов n, по которым распределяется нагрузка

$$f = \frac{3F}{16} = \frac{3\rho g h S}{16} \approx 9{,}9\,\text{кН}. \tag{2.3.80}$$

Погрешность $0{,}1\,$кН.

Ответ: $(9{,}9 \pm 0{,}1)\,$кН.

Задача 2.3.5.2. Реостат (15 баллов)

Условие

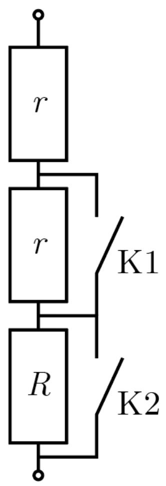


Рис. 2.3.14

Имея в своем распоряжении резисторы только двух различных номиналов, начинающий радиолюбитель изготовил ступенчатый реостат оригинальной конструкции, позволяющий, переключая ключи, получить четыре различных значения сопротивления. Увы, на приложенной к прибору схеме он забыл указать сопротивления отдельных резисторов, указав только, какие из них совпадают. В техническом паспорте устройства остались данные о том, что при замыкании ключа K_1 и размыкании ключа K_2 оно имеет сопротивление $R_1 = 2$ кОм, а напротив, при замыкании ключа K_2 и размыкании ключа K_1 — сопротивление $R_2 = 3$ кОм. Найдите максимальное сопротивление, которое можно получить, используя этот реостат.

Решение

Когда параллельно резистору коротко замыкается цепь, этот резистор фактически перестает работать, поскольку сопротивление провода пренебрежимо мало. Следовательно, замыкание ключа К1 фактически эквивалентно замене среднего резистора на отрезок провода, а ключа К2 — такой же замене нижнего. Учитывая это и применяя формулу эквивалентного сопротивления последовательно соединенных резисторов, легко получим

$$\begin{cases} R_1 = r + R, \\ R_2 = 2r. \end{cases} \tag{2.3.81}$$

Решая эту систему, находим $r = \frac{R_2}{2}$ и $R = R_1 - \frac{R_2}{2}$. Теперь точно так же составим выражения для оставшихся двух конфигураций реостата: R_3 с обоими замкнутыми ключами и R_4 с обоими разомкнутыми

$$\begin{cases} R_3 = r = \dfrac{R_2}{2} = 1{,}5\,\text{кОм}, \\ R_4 = 2r + R = R_1 + \dfrac{R_2}{2} = 3{,}5\,\text{кОм}. \end{cases} \tag{2.3.82}$$

Погрешность $0{,}01$ кОм.

Ответ: $(3{,}50 \pm 0{,}1)$ кОм.

Задача 2.3.5.3. Теплоноситель (20 баллов)

Условие

В некоторых типах ядерных реакторов в качестве теплоносителя используются жидкие металлы. Определите, сколько теплоты за 1 с забирает у реактора жидкий свинец с удельной теплоемкостью $c = 155$ Дж/(кг·°C) и средней плотностью $\rho = 10^4$ кг/м^3, если, двигаясь в трубе диаметром $d = 10$ см со скоростью $v = 20$ м/с, он нагревается от $t_1 = 400\,°\text{C}$ до $t_2 = 900\,°\text{C}$.

Решение

Обозначим рассматриваемый промежуток времени (1 с) τ. Двигаясь со скоростью v, свинец успевает за это время пройти в трубе дистанцию $l = v\tau$. Учитывая площадь сечения трубы $S = \pi d^2/4$, можно заключить из этого, что за время τ в реактор поступает и из реактора уходит объем

$$V = Sl = \frac{\pi}{4} d^2 v\tau \tag{2.3.83}$$

расплавленного свинца. Количество теплоты Q, которое этот свинец забирает у реактора, задается выражением

$$Q = cm(t_2 - t_1) = c\rho V(t_2 - t_1) = \frac{\pi}{4} c\rho d^2 v\tau(t_2 - t_1) \approx 122\,\text{МДж}, \tag{2.3.84}$$

где m — масса поступившей и ушедшей порции свинца.

Погрешность 2 МДж.

Ответ: (122 ± 2) МДж.

Задача 2.3.5.4. Шкала (25 баллов)

Условие

Шкала вольтметра, используемого в эксперименте, имеет вид, представленный на рис. 2.3.15, и общую длину $l = 15$ см (от минимальной до максимальной отметки). Экспериментатор, глядя на прибор под углом 45° к плоскости шкалы, считал показания вольтметра как $U_1 = 1{,}2$ В ровно, однако на самом деле стрелка прибора находилась напротив отметки $U_2 = 0{,}8$ В. Определите, на какое расстояние отстоит стрелка от шкалы, если известно, что глаза экспериментатора находились со шкалой строго на одном уровне высоты, а деления расположены на шкале равномерно.

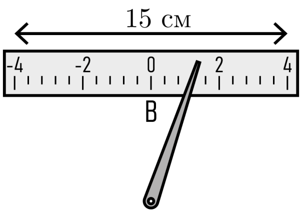


Рис. 2.3.15

Решение

Согласно условиям, глаза экспериментатора находятся на одной высоте со шкалой, поэтому удобно изобразить систему в горизонтальной плоскости (вид сверху), см. рис. 2.3.16. Поскольку угол α, под которым наблюдатель смотрит на стрелку, равен 45°, искомое расстояние x в точности равно расстоянию y между точкой A действительных показаний прибора и точкой B считанных экспериментатором показаний (треугольник ABC, где C — стрелка — прямоугольный и равнобедренный).

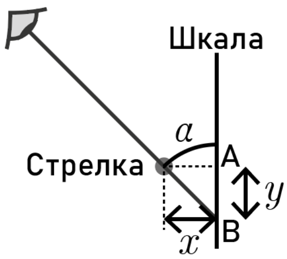


Рис. 2.3.16

Тогда остается вычислить расстояние y между отметками шкалы, соответствующими значениям U_1 и U_2. Поскольку шкала равномерная, это расстояние относится к полной длине шкалы так же, как величина абсолютной ошибки к ее разнице между ее верхним U_{max} и нижним U_{min} пределами измерений

$$\frac{y}{l} = \frac{U_2 - U_1}{U_{max} - U_{min}}. \tag{2.3.85}$$

Отсюда окончательно

$$x = y = l\frac{U_2 - U_1}{U_{max} - U_{min}} = 7{,}5 \text{ мм}. \tag{2.3.86}$$

Погрешность 0,1 мм.

Ответ: $(7{,}5 \pm 0{,}1)$ мм.

Задача 2.3.5.5. Площадка (30 баллов)

Условие

Три робота одновременно стартуют в углу A прямоугольной площадки ABCD. Все они движутся с постоянными по модулю скоростями и все заканчивают движение в точке D одновременно. Но первый робот движется по прямой вдоль стороны AD, второй — по трехзвенной ломаной ABCD, а третий — по двузвенной: сначала вдоль диагонали AC, а затем — по стороне CD. Во сколько раз средняя путевая скорость третьего робота выше, чем первого, если средняя путевая скорость второго робота выше, чем первого, в 2,5 раза? Временем на разгон, остановку и развороты роботов можно пренебречь.

Решение

Обозначив длину стороны AB (и, соответственно, CD) прямоугольника a, а длину стороны BC (и, соответственно, DA) — b, можно легко выразить через эти стороны пути $S_{1,2,3}$ всех трех роботов

$$\begin{cases} S_1 = b, \\ S_2 = 2a + b, \\ S_3 = \sqrt{a^2 + b^2} + a. \end{cases} \tag{2.3.87}$$

Поскольку время движения всех роботов совпадало, отношения их путей точно такие же, как и средних путевых скоростей:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{S_2}{S_1} = \frac{2a}{b} + 1 = 2{,}5, \tag{2.3.88}$$

откуда легко найти

$$\frac{2a}{b} = 1{,}5 \Rightarrow b = \frac{4}{3}a. \tag{2.3.89}$$

Теперь, пользуясь той же логикой, найдем ответ на вопрос задачи как отношение путей третьего и первого роботов

$$\frac{v_3}{v_1} = \frac{S_3}{S_1} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{b} = \frac{\sqrt{\frac{25a^2}{9}} + a}{\frac{4a}{3}} = \frac{\frac{8a}{3}}{\frac{4a}{3}} = 2. \tag{2.3.90}$$

Погрешность 0,01.

Ответ: $2{,}00 \pm 0{,}01$.

2.3.6. Третья волна. Задачи 10–11 класса

Задачи третьей волны предметного тура по по физике за 10–11 класс открыты для решения. Соревнование доступно на платформе Яндекс.Контест: https://contest.yandex.ru/contest/63482/enter/.

Задача 2.3.6.1. На коленке (10 баллов)

Условие

На конференции, посвященной освоению труднодоступных северных регионов, был представлен проект теплового двигателя, для работы которого используются два тепловых резервуара. Их можно собрать «на коленке»: в качестве холодильника выступает емкость с мокрым снегом, а в качестве нагревателя — котелок с кипящей водой. При этом, по заверениям авторов проекта, КПД двигателя только в $\alpha = 1{,}6$ раз уступает КПД идеальной тепловой машины с такими же холодильником и нагревателем. Найдите этот КПД. Абсолютный ноль температур $T_0 = -273\,^\circ\mathrm{C}$. Двигатель используется при нормальном атмосферном давлении на уровне моря.

Решение

Мокрый снег представляет собой смесь льда и воды, поэтому может существовать только при температуре плавления льда, $t_\text{х} = 0\,^\circ\mathrm{C}$. Аналогично, при атмосферном давлении температура кипящей воды может быть равна только $t_\text{н} = 100\,^\circ\mathrm{C}$. КПД идеальной тепловой машины (машины Карно) с известными абсолютными термодинамическими температурами $T_\text{н}$ и $T_\text{х}$ холодильника задается выражением

$$\eta_0 = \frac{T_\text{н} - T_\text{х}}{T_\text{н}}. \qquad (2.3.91)$$

Чтобы дать ответ на вопрос задачи, таким образом, остается разделить этот КПД на α и перевести температуры в шкалу Кельвина

$$\eta = \frac{\eta_0}{\alpha} = \frac{t_\text{н} - t_\text{х}}{\alpha(t_\text{н} - T_0)} \approx 16{,}8\%. \qquad (2.3.92)$$

Погрешность: 0,2%.

Ответ: $(16{,}8 \pm 0{,}2)\%$.

Задача 2.3.6.2. Патруль (15 баллов)

Условие

Корабль береговой охраны движется с постоянной скоростью $v = 12$ м/с относительно поверхности воды. Наблюдательный дрон запрограммирован летать на постоянной высоте по траектории, в системе отсчета корабля представляющей собой окружность с радиусом $R = 2$ км и центром на этом корабле, двигаясь в этой системе отсчета равномерно и совершая полный оборот за время $T = 10$ мин. Во сколько раз максимальная скорость дрона относительно поверхности воды выше его минимальной скорости относительно нее же?

Решение

Согласно правилу сложения скоростей, скорость $\vec{v}_{\text{дв}}$ дрона относительно воды равна (векторной) сумме его скорости $\vec{v}_{\text{дк}}$ относительно корабля и скорости $\vec{v}_{\text{кв}}$ корабля относительно воды. Поскольку направление вектора $\vec{v}_{\text{кв}}$ неизменно, а вектор $\vec{v}_{\text{дк}}$ в ходе движения дрона принимает все возможные в горизонтальной плоскости направления, обязательно найдутся такие моменты времени, когда эти два вектора сонаправлены и такие, когда они противонаправлены. Эти два случая и будут соответствовать максимальному и минимальному значениям модуля суммы этих векторов, равным $v_{max} = |\vec{v}_{\text{дк}}| + |\vec{v}_{\text{кв}}|$ и $v_{min} = ||\vec{v}_{\text{дк}}| - |\vec{v}_{\text{кв}}||$ соответственно.

Модуль вектора $\vec{v}_{\text{кв}}$ дан напрямую: он равен v. Модуль вектора $\vec{v}_{\text{дк}}$ легко получить, разделив путь дрона в СО корабля на период его обращения в этой СО

$$v_{\text{дк}} = \frac{2\pi R}{T}. \tag{2.3.93}$$

Отсюда получим окончательно

$$\frac{v_{max}}{v_{min}} = \frac{vT + 2\pi R}{|vT - 2\pi R|} \approx 3{,}68. \tag{2.3.94}$$

Погрешность 0,02.

Ответ: $3{,}68 \pm 0{,}02$.

Задача 2.3.6.3. Конденсатор (20 баллов)

Условие

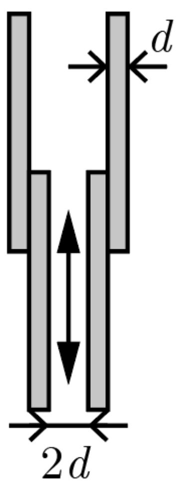


Рис. 2.3.17

Переменный конденсатор состоит из двух пар металлических пластинок толщиной d и площадью $S \gg d^2$, разделенных воздушными зазорами. При этом одна из пар (внутренняя) может частично или полностью входить в зазор другой (внешней), плотно прилегая к ней так, что электрический контакт между соответствующими пластинами никогда не нарушается, но при полном выдвижении площадь этого контакта пренебрежимо мала в сравнении с S.

Определите, во сколько раз максимальная емкость такого конденсатора превосходит минимальную, если зазор между пластинами внутренней пары имеет ширину $2d$.

Решение

Рассматриваемый конденсатор может быть представлен как батарея из двух параллельно соединенных конденсаторов, один из которых (внутренняя пара пластин) всегда имеет зазор $2d$ и площадь обкладок S, а другой (внешняя пара) имеет зазор $4d$ и площадь обкладок, которая может изменяться в пределах от 0 до S. Поскольку эти конденсаторы соединены параллельно, эквивалентная емкость батареи равна сумме их емкостей, а значит, максимальна, когда пары пластин максимально раздвинуты и минимальна, когда они полностью вдвинуты одна в другую. Используя формулу емкости плоского конденсатора, найдем, что емкость внутренней пары пластин (она же минимальная емкость всей батареи) равна

$$C_1 = \frac{S\varepsilon_0}{2d}, \tag{2.3.95}$$

где ε_0 — диэлектрическая постоянная.

Аналогично, емкость полностью выдвинутой внешней пары равна

$$C_2 = \frac{S\varepsilon_0}{4d}, \tag{2.3.96}$$

а максимальная емкость батареи составляет, соответственно, $C_1 + C_2$.

Тогда для искомого отношения максимальной и минимальной емкостей получим:

$$\frac{C_{max}}{C_{min}} = \frac{C_1 + C_2}{C_1} = \frac{\cancel{S\varepsilon_0}/(4\cancel{d}) + \cancel{S\varepsilon_0}/(2\cancel{d})}{\cancel{S\varepsilon_0}/(2\cancel{d})} = \frac{1/4 + 1/2}{1/2} = 1{,}5. \tag{2.3.97}$$

Погрешность 0,01.

Ответ: $1{,}50 \pm 0{,}01$.

Задача 2.3.6.4. Аэростат (25 баллов)

Условие

Горелка теплового аэростата способна поддерживать среднюю температуру воздуха в его оболочке не более, чем на $\Delta t = 70\,^\circ$C выше, чем температура окружающего шар воздуха. Аэростат имеет объем $V = 645$ м^3, а общая масса его оболочки, корзины и полезной нагрузки $M = 150$ кг. Определите, при какой максимальной температуре окружающей среды аэростат сможет взлететь?

Абсолютный ноль температур $T_0 = -273\,^\circ\mathrm{C}$, атмосферное давление $p_0 = 100\,$кПа, молярная масса воздуха $\mu = 29\,$г/моль, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31\,$Дж/(моль $\cdot$ К).

Решение

Оболочки монгольфьеров (тепловых аэростатов) представляют собой открытые сосуды, поэтому давление внутри и снаружи оболочки должно совпадать (и равняться p_0). Тогда из уравнения Менделеева – Клапейрона

$$p_0 V = \frac{m}{\mu} RT, \tag{2.3.98}$$

где T — абсолютная термодинамическая температура газа, m — его масса.

Легко выразить массу m_1 воздуха внутри оболочки и массу m_2 вытесненного атмосферного воздуха

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{\mu p_0 V}{R(T_0 + \Delta t)}, \\ m_2 &= \frac{\mu p_0 V}{RT_0}, \end{aligned} \tag{2.3.99}$$

где T_0 — искомая температура окружающего воздуха.

Для того чтобы аэростат мог подняться в воздух, необходимо, чтобы вес вытесняемого им воздуха превысил его общий вес (включая вес газа в оболочке)

$$m_2 \cancel{g} = M \cancel{g} + m_1 \cancel{g} \Rightarrow \frac{\mu p_0 V}{RT_0} = M + \frac{\mu p_0 V}{R(T_0 + \Delta t)}, \tag{2.3.100}$$

где g — ускорение свободного падения (сразу сокращающееся во всех слагаемых).

Домножим это выражение на $RT_0(T_0 + \Delta T)$ и получим квадратное уравнение относительно T_0

$$\mu p_0 V(\cancel{T_0} + \Delta t) = MRT_0(T_0 + \Delta t) + \cancel{\mu p_0 V T_0}. \tag{2.3.101}$$

В канонической форме:

$$T_0^2 + T_0 \Delta t - \frac{\mu p_0 V \Delta t}{MR} = 0. \tag{2.3.102}$$

Остается найти (методом дискриминанта) единственный положительный корень этого уравнения

$$T_0 = -\frac{\Delta t}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\Delta t^2 + \frac{4\mu p_0 V}{MR}\Delta t} \approx 291\,\mathrm{K} \approx 18\,^\circ\mathrm{C}. \tag{2.3.103}$$

Погрешность $0{,}1\,^\circ\mathrm{C}$.

Ответ: $(18{,}0 \pm 0{,}1)\,^\circ\mathrm{C}$.

Задача 2.3.6.5. Спутник (30 баллов)

Условие

Спутник, движущийся вокруг Земли по высокой круговой орбите, перевели на другую круговую орбиту, в результате чего его кинетическая энергия увеличилась на 5%. На сколько процентов увеличился модуль потенциальной энергии взаимодействия спутника с планетой, если она считается равной нулю на бесконечном удалении от планеты?

Решение

Обозначим радиус орбиты спутника R, его орбитальную скорость v, его массу m, а массу планеты M. На спутник действует сила всемирного тяготения

$$F = G\frac{mM}{R^2}, \tag{2.3.104}$$

где G — гравитационная постоянная, связанная с центростремительным ускорением v^2/R спутника вторым законом Ньютона

$$\cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{R}} = G\frac{\cancel{m}M}{R^{\cancel{2}}}. \tag{2.3.105}$$

Из этого выражения легко видеть, что квадрат орбитальной скорости спутника v^2 обратно пропорционален радиусу орбиты. Разумеется, кинетическая энергия спутника $mv^2/2$ прямо пропорциональна этому квадрату скорости и, следовательно, тоже обратно пропорциональна R.

Чтобы понять, как потенциальная энергия спутника зависит от радиуса его орбиты, проще всего обратить внимание на аналогию между гравитацией и электростатическими силами. Сила Кулона взаимодействия двух точечных зарядов зависит от расстояния между ними и обратно пропорциональна квадрату разделяющего их расстояния, точно так же, как сила всемирного тяготения. Одновременно потенциальная энергия взаимодействия этих зарядов обратно пропорциональна первой степени расстояния между ними, следовательно, то же справедливо и для гравитации. В результате видно, что модуль потенциальной энергии обратно пропорционален R, как и кинетическая энергия. Следовательно, при изменении орбиты спутника он изменится ровно во столько же раз.

Погрешность 0,01%.

Ответ: $(5{,}00 \pm 0{,}01)\%$.

2.3.7. Четвертая волна. Задачи 8–9 класса

Задачи четвертой волны предметного тура по физике за 8–9 класс открыты для решения. Соревнование доступно на платформе Яндекс.Контест: https://contest.yandex.ru/contest/63466/enter/.

Задача 2.3.7.1. Расплав (10 баллов)

Условие

Расплавленная соль предлагается как эффективный аккумулятор тепла для некоторых типов теплоцентралей. Удельная теплота плавления и кристаллизации соли $\lambda = 28{,}7\,$кДж/кг, ее теплоемкость в твердой форме $c_1 = 0{,}92\,$кДж/(кг°C), а в жидкой — $c_2 = 1{,}5\,$кДж/(кг°C), температура ее плавления $\theta = 800\,$°C. Определите, какую массу соли необходимо взять, чтобы при ее нагреве от $t_0 = 20\,$°C до $t_1 = 1200\,$°C запасти $Q = 1\,$МДж тепла.

Решение

Количество теплоты, требуемое на нагрев твердой соли до температуры плавления, задается выражением

$$Q_1 = c_1 m(\theta - t_0), \tag{2.3.106}$$

где m — масса нагреваемой соли.

Количество теплоты, уходящее непосредственно на плавление

$$Q_2 = \lambda m. \tag{2.3.107}$$

Наконец, количество теплоты, уходящее на нагрев расплава соли,

$$Q_3 = c_2 m(t_1 - \theta). \tag{2.3.108}$$

Складывая все эти порции тепла, получим, что общая запасаемая теплота

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = m(c_1(\theta - t_0) + \lambda + c_2(t_1 - \theta)), \tag{2.3.109}$$

откуда окончательно

$$m = \frac{Q}{(c_1(\theta - t_0) + \lambda + c_2(t_1 - \theta))} \approx 743\,\text{г}. \tag{2.3.110}$$

Погрешность 1 г.

Ответ: (743 ± 1) г.

Задача 2.3.7.2. Катафот (15 баллов)

Условие

Катафот представляет собой два одинаковых квадратных зеркала, соединенных общей гранью под прямым углом друг к другу. При падении на него видимого света каждое зеркало поглощает $\eta = 20\%$ достигающей его световой энергии, а остальную — отражает. Параллельно биссектрисе образованного зеркалами угла в плоскости, перпендикулярной к их общему ребру, на середину одного из зеркал падает узкий лазерный луч, переносящий мощность $P = 5\,$мВт. Какое количество световой энергии поглотит второе зеркало за $\tau = 10\,$с?

Решение

Прежде всего отметим, что любой луч, падающий на катафот параллельно его биссектрисе, отразится последовательно от обоих зеркал катафота, как изображено на рис 2.3.18. При этом после первого отражения мощность луча снизится в $(1 - \eta)$ раз, и доля η от этой оставшейся мощности будет поглощена вторым зеркалом. В результате связь между изначальной P и поглощаемой P_1 мощностями имеет следующий вид:

$$P_1 = (1 - \eta)\eta P. \tag{2.3.111}$$

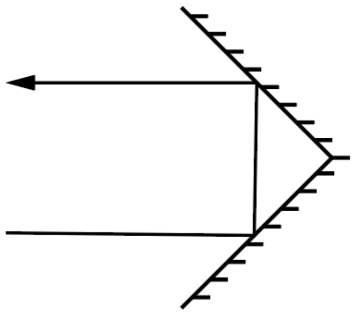


Рис. 2.3.18

Теперь остается лишь вспомнить определение мощности, как отношения энергии (в данном случае переносимой лазерным лучом или поглощаемой зеркалом) ко времени, чтобы получить окончательный ответ

$$Q = P_1\tau = (1 - \eta)\eta P\tau \approx 8\,\text{мДж}. \tag{2.3.112}$$

Погрешность $0{,}1$ мДж.

Ответ: $(8{,}0 \pm 0{,}1)$ мДж.

Задача 2.3.7.3. Соты (20 баллов)

Условие

Композитный материал изготавливают, вырезая из алюминия (плотность $\rho_1 = 2{,}7\,\text{г/см}^3$) строго периодическую вдоль двух взаимно перпендикулярных осей квадратную сетку с толщиной стенки d и длиной внутренней стороны ячейки $4d$, фрагмент которой изображен на рис. 2.3.19. Затем полости заполняют смолой, после затвердевания имеющей плотность $\rho_2 = 1{,}2\,\text{г/см}^3$. Найдите среднюю плотность большого листа из такого материала.

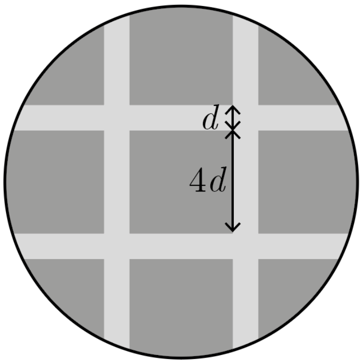


Рис. 2.3.19

Решение

По мере увеличения размеров листа материала роль его краев в общей плотности постепенно снижается, поэтому среднюю плотность большого листа следует вычислять как среднюю плотность одного элемента периодичности, границы которого изображены пунктиром на рис. 2.3.20. Объем V этого элемента равен $25dh$, где h — толщина листа материала.

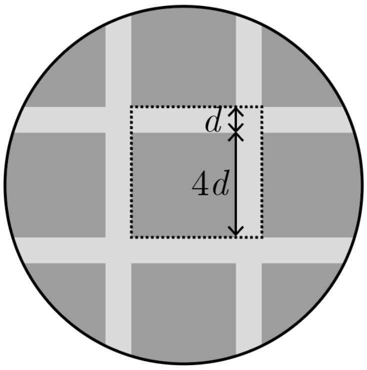


Рис. 2.3.20

Массу элемента найдем, сложив массы алюминия (индексы 1) и смолы (индексы 2)

$$m = m_1 + m_2 = \rho_1 V_1 + \rho_2 V_2 = \rho_1 9dh + \rho_2 16dh. \qquad (2.3.113)$$

Тогда искомая плотность окончательно равна

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{\rho_1 9\cancel{dh} + \rho_2 16\cancel{dh}}{25\cancel{dh}} \approx 1{,}74\,\text{г/см}^3. \qquad (2.3.114)$$

Погрешность $0{,}01\,\text{г/см}^3$.

Ответ: $(1{,}74 \pm 0{,}01)\,\text{г/см}^3$.

Задача 2.3.7.4. Домкрат (25 баллов)

Условие

На рис. 2.3.21 приведена схема устройства гидравлического домкрата. Его поршни представляют собой цилиндры с радиусами $R = 21$ см и $r = 3$ см. Чтобы поднимать при помощи этого домкрата груз $m = 1{,}4$ т, установленный на платформе большого цилиндра, к точке A рычага необходимо приложить силу не менее $F = 87{,}5$Н. Определите отношение $AB : BC$. Ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2. На рисунке точный масштаб не сохранен.

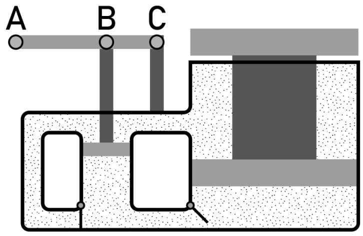


Рис. 2.3.21

Решение

Изображенный домкрат дает выигрыш в силе благодаря двум механизмам: рычагу и гидравлическому прессу. Выигрыш в силе, обеспечиваемый прессом, равен отношению площадей его цилиндров

$$\frac{mg}{F_1} = \frac{\cancel{\pi} R^2}{\cancel{\pi} r^2} \Rightarrow F_1 = mg\frac{r^2}{R^2}, \tag{2.3.115}$$

где F_1 — сила давления малого поршня.

В свою очередь, выигрыш в силе, обеспечиваемый рычагом, равен отношению его плеч, но так как рычаг закреплен в точке C, нужно сравнивать плечи AC и BC

$$\frac{F_1}{F} = \frac{AC}{BC} = \frac{AB + BC}{BC} = 1 + \frac{AB}{BC}. \tag{2.3.116}$$

Совместив эти уравнения, получим окончательно

$$\frac{AB}{BC} = \frac{F_1}{F} - 1 = \frac{mgr^2}{FR^2} - 1 = 2{,}2. \tag{2.3.117}$$

Погрешность 0,1.

Ответ: $2{,}2 \pm 0{,}1$.

Задача 2.3.7.5. Номинальная мощность (30 баллов)

Условие

Изучая электронагреватель прямого действия, ученик заметил, что увеличение подаваемой на него силы тока на $\Delta I = 0{,}1$ А над номинальным значением приводит к увеличению тепловой мощности, выделяемой прибором, на $\Delta P_1 = 44$ Вт, а уменьшение силы тока на ту же величину от номинальной, приводит к уменьшению мощности на $\Delta P_2 = 36\,$Вт. Найдите номинальную мощность прибора, считая его сопротивление независимым от температуры.

Решение

Согласно закону Джоуля – Ленца, тепловая мощность электронагревателя равна

$$P = I^2 R, \tag{2.3.118}$$

где I — сила пропускаемого через него тока, а R — сопротивление прибора. Последнее по условиям задачи можно считать неизменным, поэтому, введя обозначения I_0 для номинальной силы тока и P_0 для номинальной мощности прибора, можно составить пропорции

$$\begin{cases} \dfrac{P_0 + \Delta P_1}{P_0} = \left(\dfrac{I_0 + \Delta I}{I_0}\right)^2, \\ \dfrac{P_0 - \Delta P_2}{P_0} = \left(\dfrac{I_0 - \Delta I}{I_0}\right)^2. \end{cases} \tag{2.3.119}$$

Обозначив $\frac{\Delta I}{I_0}$ буквой x и частично сократив дроби, приведем их к виду

$$\begin{cases} 1 + \dfrac{\Delta P_1}{P_0} = (1+x)^2, \\ 1 - \dfrac{\Delta P_2}{P_0} = (1-x)^2. \end{cases} \tag{2.3.120}$$

Эту систему можно решить, вычитая второе уравнение из первого

$$\frac{\Delta P_1 + \Delta P_2}{P_0} = 4x \Rightarrow x = \frac{\Delta P_1 + \Delta P_2}{4P_0} \tag{2.3.121}$$

и подставляя результат в любое уравнение системы (2.3.120)

$$\cancel{1} + \frac{\Delta P_1}{P_0} = \cancel{1} + \frac{\Delta P_1 + \Delta P_2}{2P_0} + \frac{(\Delta P_1 + \Delta P_2)^2}{16P_0^2}. \tag{2.3.122}$$

Домножим на $16P_0^2$

$$16\Delta P_1 P_0 = 8P_0(\Delta P_1 + \Delta P_2) + (\Delta P_1 + \Delta P_2)^2. \tag{2.3.123}$$

и выразим окончательно

$$P_0 = \frac{(\Delta P_1 + \Delta P_2)^2}{8(\Delta P_1 - \Delta P_2)} = 100\,\text{Вт}. \tag{2.3.124}$$

Погрешность $1\,$Вт.

Ответ: 100 ± 1 Вт.

2.3.8. Четвертая волна. Задачи 10–11 класса

Задачи четвертой волны предметного тура по по физике за 10–11 класс открыты для решения. Соревнование доступно на платформе Яндекс.Контест: https://contest.yandex.ru/contest/63483/enter/.

Задача 2.3.8.1. Шестеренки (10 баллов)

Условие

В сложной трансмиссии две шестеренки А и Б вращаются в различных частях механизма так, что угловая скорость вращения шестеренки А в 3 раза выше, чем шестеренки Б, но линейная скорость зубцов шестеренки Б в 2 раза выше, чем шестеренки А. Найдите отношение центростремительного ускорения зубцов шестеренки А к центростремительному ускорению зубцов шестеренки Б.

Решение

Два хорошо известных выражения для центростремительного ускорения a

$$a = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R, \tag{2.3.125}$$

где R — радиус траектории, v — линейная скорость, ω — угловая скорость. Перемножив эти выражения, получим

$$a^2 = \frac{v^2}{\cancel{R}}\omega^2 \cancel{R} \Rightarrow a = v\omega. \tag{2.3.126}$$

Таким образом, центростремительное ускорение равно произведению линейной скорости на угловую, из чего следует

$$\frac{a_\text{А}}{a_\text{Б}} = \frac{v_\text{А}}{v_\text{Б}} \cdot \frac{\omega_\text{А}}{\omega_\text{Б}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{1} = 1{,}5. \tag{2.3.127}$$

Погрешность 0,01.

Ответ: $1{,}50 \pm 0{,}01$.

Задача 2.3.8.2. Маятник (15 баллов)

Условие

Заряженный металлический шарик закреплен на конце тонкой шелковой нити и несет заряд $q = 20$ мкКл. Другой конец нити закреплен к потолку. Определите массу шарика, если при помещении такого маятника в однородное электрическое поле, вектор напряженности которого направлен строго горизонтально и равен по модулю $E = 2{,}5$ кВ/м, сила натяжения нити после установления равновесия оказывается равна $T = 130$ мН. Ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2.

Решение

На шарик действуют три силы: горизонтально направленная сила электростатического взаимодействия $q\vec{E}$, вертикально вниз направленная сила тяжести $m\vec{g}$ и направленная вдоль нити сила ее натяжения $\vec{T}$. Разумеется, маятник может быть в равновесии, только если векторная сумма этих сил равна нулю, то есть эти три вектора образуют замкнутый треугольник

$$q\vec{E} + m\vec{g} + \vec{T} = \vec{0}. \tag{2.3.128}$$

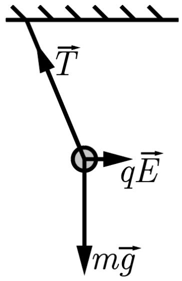


Рис. 2.3.22

Поскольку направления $\vec{E}$ и $\vec{g}$ известны, этот треугольник прямоугольный, а $\vec{T}$ — его гипотенуза. Тогда из теоремы Пифагора

$$q^2E^2 + m^2g^2 = T^2 \Rightarrow m = \frac{\sqrt{T^2 - q^2E^2}}{g} \approx 12{,}2\,\text{г}. \tag{2.3.129}$$

Погрешность $0{,}2$ г.

Ответ: $(12{,}2 \pm 0{,}2)$ г.

Задача 2.3.8.3. Автопилот (20 баллов)

Условие

Автомобиль с автопилотом запрограммирован таким образом, что при движении по прямой на трассе он всегда старается поддерживать дистанцию между собой и движущимся непосредственно перед ним автомобилем ровно такой же, как между собой и движущимся непосредственно за ним автомобилем. В некоторый момент движения скорости всех трех этих автомобилей были равны. Определите ускорение автомобиля, движущегося непосредственно за автопилотируемым, если модули ускорения самого автопилотируемого автомобиля и движущегося непосредственно перед ним в этот момент оба оказались равны $a = 0{,}2\,\text{м/с}^2$, но дистанция между ними при этом начала сокращаться. Колеса автомобилей движутся без проскальзывания, и автопилоту удается соблюдать требования своей программы.

Решение

Программа автомобиля означает, что (до тех пор, пока это позволяет мощность двигателя и сцепление колес) координата x вдоль оси, совпадающей с дорогой, автомобиля с автопилотом равна среднему арифметическому координат x_1 идущего впереди и x_2 идущего позади

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}. \qquad (2.3.130)$$

Поскольку такая кинематическая связь справедлива в любые два момента времени t_1 и t_2, для средней скорости v автомобиля на автопилоте в проекции на $0x$ на любом промежутке времени можно записать

$$v_x = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{x_1(t_2) + x_2(t_2) - x_1(t_1) - x_2(t_1)}{2(t_2 - t_1)} = \frac{v_{x1} + v_{x2}}{2}, \qquad (2.3.131)$$

где использована та же система индексов. Таким образом, средняя скорость на любом промежутке времени и, следовательно, мгновенная скорость в любой момент времени автомобиля на автопилоте в проекции на $0x$ равна среднему арифметическому мгновенной скорости в этой же проекции впереди и позади идущих автомобилей. Повторение этих рассуждений приводит к аналогичному результату для ускорений

$$a_x = \frac{a_{x1} + a_{x2}}{2}. \qquad (2.3.132)$$

Выразим из этого уравнения проекцию на $0x$ искомого ускорения замыкающего автомобиля a_{x2}

$$a_{x2} = 2a_x - a_{x1}. \qquad (2.3.133)$$

По условиям задачи в рассматриваемый момент скорости всех трех автомобилей равны, а ускорения a_1 и a совпадают по модулю, но дистанция начинает сокращаться. Это возможно только если передний автомобиль тормозит — имеет отрицательную проекцию ускорения на направление движения, а автопилотируемый автомобиль, напротив, ускоряется (имеет положительную проекцию). Тогда напрямую из (2.3.133) получим

$$a_{x2} = 2a_x - a_{x1} = 2a - (-a) = 3a = 0{,}6\,\text{м/с}^2. \qquad (2.3.134)$$

Погрешность $0{,}01\,\text{м/с}^2$.

Ответ: $(0{,}60 \pm 0{,}01)\,\text{м/с}^2$.

Задача 2.3.8.4. Лифт (25 баллов)

Условие

В лифте, движущемся вверх с некоторым ускорением a, сонаправленным его скорости, уронили без начальной скорости относительно лифта мячик с высоты $h_1 = 0{,}6\,\text{м}$ над уровнем пола лифта. Мячик абсолютно упруго ударился о пол, но своим ударом спровоцировал срабатывание системы аварийной остановки, в результате чего в момент удара ускорение лифта резко поменяло направление на противоположное, а его модуль возрос втрое. После отскока мячик поднялся до высоты $h_2 = 1{,}8\,\text{м}$. Определите a. Ускорение свободного падения $g = 9{,}8\,\text{м/с}^2$.

Решение

В системе отсчета, связанной с лифтом, начальное ускорение мяча равно $g + a$. Проходя с этим ускорением расстояние h_1, мяч приобретает скорость (относительно лифта) v, которую легко вычислить из соотношения

$$\frac{v^2}{2} = (g + a)h_1. \tag{2.3.135}$$

В момент удара резко меняется ускорение, но не скорость лифта, поэтому значение v при абсолютно упругом ударе по модулю остается неизменным.

В процессе подъема мяч уже имеет относительно лифта ускорение $g - 3a$, что позволяет записать аналогично

$$\frac{v^2}{2} = (g - 3a)h_2. \tag{2.3.136}$$

Совмещая эти равенства, получим окончательно

$$(g + a)h_1 = (g - 3a)h_2 \Rightarrow a(h_1 + 3h_2) = g(h_2 - h_1) \Rightarrow a = g\frac{h_2 - h_1}{h_1 + 3h_2} = 1{,}96\,\text{м/с}^2. \tag{2.3.137}$$

Погрешность $0{,}02$ м/с^2.

Ответ: $(1{,}96 \pm 0{,}02)$ м/с^2.

Задача 2.3.8.5. Эффект Лейденфроста (30 баллов)

Условие

Капля воды при температуре немного ниже температуры кипения упала на раскаленную поверхность, в результате чего $\alpha = 10^{-5}$ ее массы практически мгновенно испарилось. Известно, что $\eta = 3\%$ полученной каплей энергии пошло на работу расширяющегося пара над оставшейся частью капли.

На какую высоту «подпрыгнет» капля вертикально вверх в результате такого испарения, если сопротивлением воздуха ее движению, а также потерями тепла в окружающую среду и работой пара против воздуха можно пренебречь?

Удельная теплота парообразования воды равна $L = 2{,}26$ МДж/кг, ускорение свободного падения $g = 9{,}8\,\text{м/с}^2$.

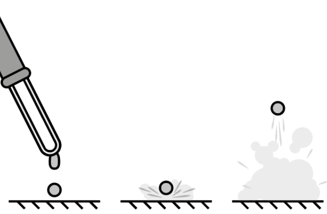


Рис. 2.3.23

Решение

Согласно первому началу термодинамики та теплота, полученная каплей, которая не пошла на работу расширяющегося пара над жидкой частью капли, ушла на изменение ее внутренней энергии; в данном случае — на испарение. Таким образом, можно записать для для этой части энергии

$$\Delta U = (1-\eta)Q = Lm\alpha, \tag{2.3.138}$$

где m — масса капли до испарения, а Q — общая полученная каплей теплота. Отсюда легко найти Q

$$Q = \frac{Lm\alpha}{1-\eta}. \tag{2.3.139}$$

В то же время работа пара над каплей полностью идет на увеличение ее механической энергии, которая в верхней точке траектории чисто потенциальна

$$A = \eta Q = (1-\alpha)mgh. \tag{2.3.140}$$

Выражая из этого уравнения h и подставляя в него Q, получаем

$$h = \frac{\eta Q}{(1-\alpha)mg} = \frac{L\alpha\eta}{(1-\alpha)(1-\eta)g} \approx 7{,}1\,\text{см}. \tag{2.3.141}$$

Разумеется, если величину $1-\alpha$ в этом выражении считать просто единицей, ответ не изменится в пределах любой разумной погрешности.

Погрешность $0{,}5$ см.

Ответ: $(7{,}1 \pm 0{,}5)$ см.

2.4. Инженерный тур

Задачи первого этапа инженерного тура открыты для решения. Соревнование доступно на платформе Яндекс.Контест: https://contest.yandex.ru/contest/66694/enter/.

Задача 2.4.1. Квантовая лампочка (5 баллов)

Темы: квантовая суперпозиция, вероятностная интерпретация квантовой механики.

Условие

Пусть состояние квантовой лампочки полностью описывается вектором состояния:

$$|\Psi\rangle = -\frac{2}{\sqrt{5}}|\mathrm{on}\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}}|\mathrm{off}\rangle .$$

Выбрать все верные утверждения:

A. вероятность при измерении обнаружить лампочку включенной равна $4/5$;

B. возможны и другие, кроме `on` и `off`, результаты измерения состояния лампочки в этом базисе;

C. замена знака перед коэффициентом при $|\mathrm{off}\rangle$ не приведет к наблюдаемым последствиям при определении вероятности исходов `on` и `off`.

Решение

A. Вероятность получить результат измерения «лампочка включена» определяется квадратом модуля коэффициента при состоянии $|\mathrm{on}\rangle$.

B. В условии сказано, что состояние лампочки полностью описывается приведенным выражением, значит, здесь уже учтены все возможные результаты измерений и других быть не может.

C. Поскольку вероятность сходов измерений определяется квадратом модуля соответствующих коэффициентов, знак в данном случае не играет роли.

Ответ: A, C.

Задача 2.4.2. Описание эксперимента (8 баллов)

Темы: квантовая суперпозиция, вероятностная интерпретация квантовой механики.

Условие

В ходе предварительных экспериментов физики обнаружили новую характеристику квантовой частицы, которая принимает строго одно из значений `-1`, `0`, `1`. Причем значение `-1` получалось в 600 случаях из 1 000, значение `0` — в 250 случаях из 1 000, а `1` — в 150 случаях из 1 000. Каким вектором состояния можно описать такую квантовую систему, если опираться только на эти данные?

A. $|\Psi\rangle = \sqrt{\frac{3}{5}}\,|-1\rangle + \frac{1}{2}\,|0\rangle + \sqrt{\frac{3}{20}}\,|1\rangle$.
B. $|\Psi\rangle = \frac{3}{5}\,|-1\rangle + \frac{1}{4}\,|0\rangle + \frac{3}{20}\,|1\rangle$.
C. $|\Psi\rangle = -\frac{3}{5}\,|-1\rangle - \frac{1}{4}\,|0\rangle + \frac{3}{20}\,|1\rangle$.
D. $|\Psi\rangle = -\sqrt{\frac{3}{5}}\,|-1\rangle - \frac{1}{2}\,|0\rangle - \sqrt{\frac{3}{20}}\,|1\rangle$.
E. $|\Psi\rangle = \sqrt{\frac{3}{5}}\,|-1\rangle - \frac{1}{2}\,|0\rangle + \sqrt{\frac{3}{20}}\,|1\rangle$.
F. $|\Psi\rangle = -\frac{3}{5}\,|-1\rangle + \frac{3}{20}\,|1\rangle$.
G. $|\Psi\rangle = \sqrt{\frac{3}{5}}\,|-1\rangle + \sqrt{\frac{3}{20}}\,|1\rangle$.

Решение

На основании предварительных экспериментов, приведенных в условии, можно сделать вывод о том, что вероятность получения `-1` равна:

$$\frac{600}{1\,000} = \frac{3}{5};$$

вероятность получения `0` равна:

$$\frac{250}{1\,000} = \frac{1}{4};$$

вероятность получения `1` равна:

$$\frac{150}{1\,000} = \frac{3}{20}.$$

Поскольку исследуемая характеристика квантовой частицы может принимать только эти значения, можно утверждать, что ее квантовое состояние описывается вектором с тремя компонентами, соответствующими $\{|-1\rangle, |0\rangle, |1\rangle\}$. Причем квадрат модуля этих компонент должен давать значение вероятности конкретного результата измерения. Этим требованиям отвечают варианты A, D, E.

Ответ: A, D, E.

Задача 2.4.3. Нормировка (12 баллов)

Темы: квантовая суперпозиция, вероятностная интерпретация квантовой механики.

Условие

Нормировать вектор состояния:

$$|\Psi\rangle = \sqrt{\frac{1}{10}}\,|a=1\rangle + \frac{2}{3}\,|a=2\rangle - \frac{1}{2}\,|a=3\rangle + \frac{13}{40}\,|a=4\rangle - \frac{9}{11}\,|a=5\rangle\,.$$

В ответе указать нормировочный коэффициент с точностью до четвертого знака после запятой.

Решение

Сумма вероятностей всех возможных результатов измерения должна равняться единице, а вероятность отдельного исхода определяется квадратом модуля соответствующего числового коэффициента. Для приведенного вектора состояния сумма квадратов модулей числовых коэффициентов равна:

$$P = \left(\sqrt{\frac{1}{10}}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{13}{40}\right)^2 + \left(-\frac{9}{11}\right)^2 = 1{,}56951 \neq 1.$$

Чтобы P стало равно единице, состояние $|\Psi\rangle$ необходимо домножить на величину:

$$\frac{1}{\sqrt{P}} = 0{,}7982.$$

Эта величина и является нормировочным коэффициентом.

Ответ: 0,7982.

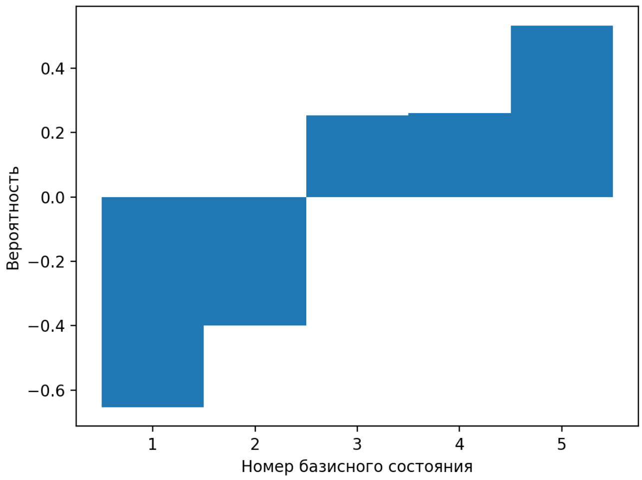
Задача 2.4.4. Гистограммы (8 баллов)

Темы: квантовая суперпозиция, вероятностная интерпретация квантовой механики, графическое представление квантовой вероятности.

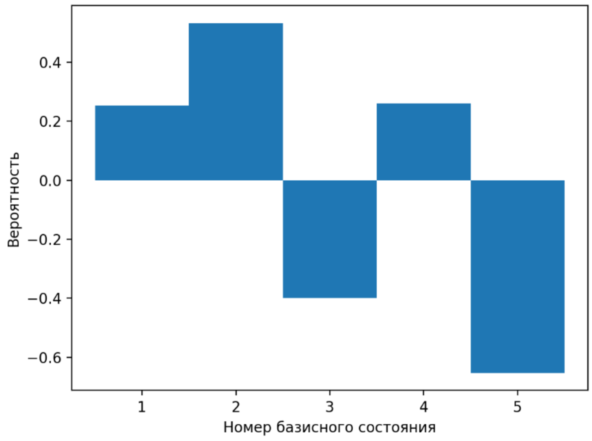
Условие

Выбрать гистограмму, верно описывающую вероятности получения различных результатов при измерении физической величины a в квантовом состоянии $|\rangle$ из предыдущей задачи с учетом нормировки.

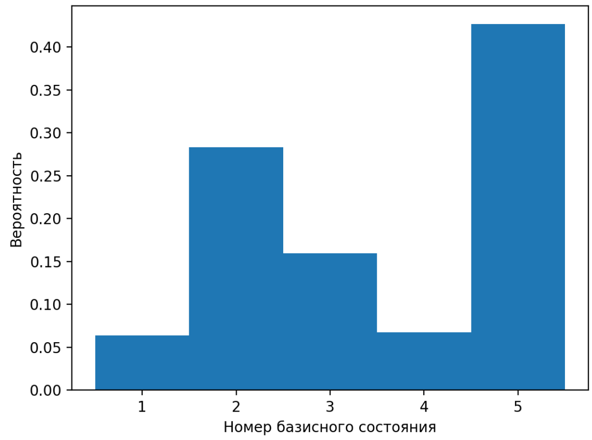
A.



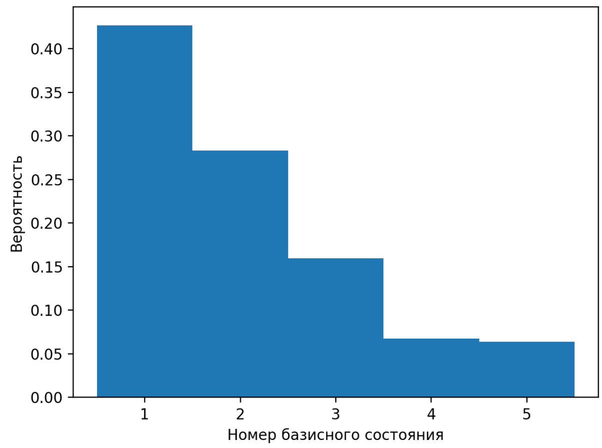
B.


Вероятность
0.4
0.2
0.0
−0.2
−0.4
−0.6
1
2
3
4
5
Номер базисного состояния

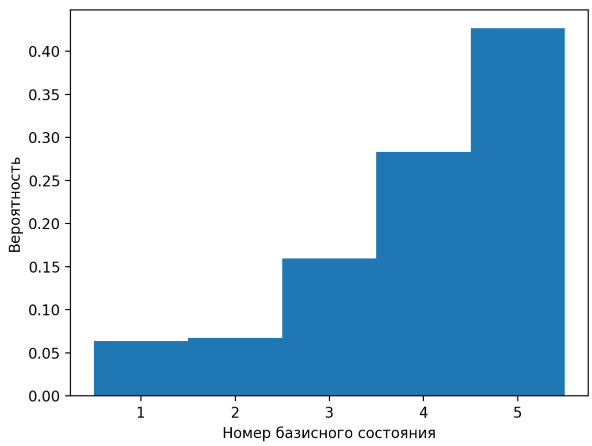
C.


Вероятность
0.40
0.35
0.30
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
1
2
3
4
5
Номер базисного состояния

D.


Вероятность
0.40
0.35
0.30
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
1
2
3
4
5
Номер базисного состояния

E.


Вероятность
0.40
0.35
0.30
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
1
2
3
4
5
Номер базисного состояния

Решение

Вероятности получения различных результатов измерений можно представить в виде гистограммы, где положение столбца будет определять результат измерения, а высота — вероятность его получения. Этому правилу соответствует только картинка C.

Ответ: C.

Задача 2.4.5. Кошка Шредингера (17 баллов)

Темы: понятие базиса в квантовой физике, вероятностная интерпретация квантовой физики.

Условие

Пусть кошка Шредингера находится в квантовом состоянии

$$|\Psi\rangle = \sqrt{\frac{1}{5}} \cdot (-2\,|\text{жива}\rangle + |\text{мертва}\rangle).$$

Какова вероятность обнаружить кошку Шредингера в состоянии «призрак» при измерении ее в следующем базисе?

$$\begin{cases} |\text{зомби}\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}\,|\text{жива}\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}}\,|\text{мертва}\rangle\,, \\ |\text{призрак}\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}\,|\text{жива}\rangle - \sqrt{\frac{1}{2}}\,|\text{мертва}\rangle\,. \end{cases}$$

Ответ записать в виде десятичной дроби.

Решение

Для определения вероятности обнаружить кошку в состоянии «призрак» необходимо переписать состояние $|\Psi\rangle$ в базисе $\{|\text{зомби}\rangle\,, |\text{призрак}\rangle\}$. Это можно сделать, выразив состояния $|\text{жива}\rangle$ и $|\text{мертва}\rangle$ через состояния $|\text{зомби}\rangle$ и $|\text{призрак}\rangle$ из приведенной в условии системы уравнений:

$$\begin{cases} |\text{жива}\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}\,|\text{зомби}\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}}\,|\text{призрак}\rangle\,, \\ |\text{мертва}\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}\,|\text{зомби}\rangle - \sqrt{\frac{1}{2}}\,|\text{призрак}\rangle\,. \end{cases}$$

Подставив это в выражение для $|\Psi\rangle$, получим:

$$|\Psi\rangle = -\sqrt{\frac{1}{10}}\,|\text{зомби}\rangle - \sqrt{\frac{3}{10}}\,|\text{призрак}\rangle\,.$$

Отсюда следует, что вероятность обнаружения кошки Шредингера в состоянии «призрак» равна:

$$p_{\text{призрак}} = \left(-\sqrt{\frac{3}{10}}\right)^2 = 0{,}9.$$

Ответ: 0,9.

Задача 2.4.6. Фотон в оптической схеме — 1 (20 баллов)

Темы: оптические элементы, квантовое состояние фотона.

Условие

Источник S испустил одиночный фотон в квантовом состоянии:

$$|\Psi\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}\,|H\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}}\,|V\rangle\,.$$

Чему равна вероятность срабатывания детектора D_1? Ответ привести в виде дроби.

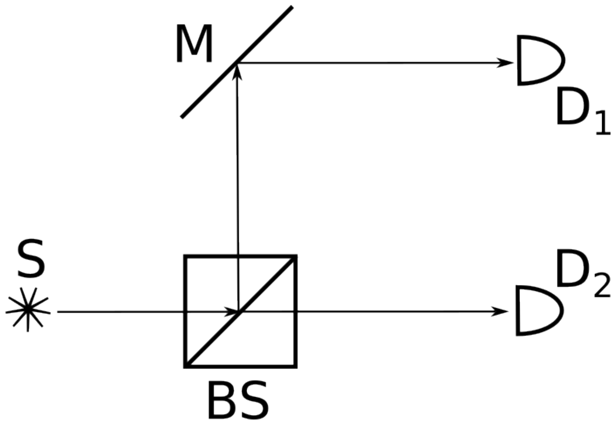


Рис. 2.4.1

Решение

Согласно оптической схеме (рис. 2.4.1), после испускания из источника фотон попадает на светоделитель BS. При этом часть вектора состояния фотона проходит BS насквозь с коэффициентом $\sqrt{\frac{1}{2}}$, она для данной задачи неинтересна. Другая часть — отражается и выходит из BS наверх, в результате чего приобретает коэффициент $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$. Далее эта часть отражается от зеркала M, приобретая дополнительный знак (-1). Таким образом, до детектора D_1 доходит состояние фотона:

$$|\Psi_1\rangle = \left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\cdot(-1)\cdot\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\,|H\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}}\,|V\rangle\right) = \sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\,|H\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}}\,|V\rangle\right).$$

Детектор сработает при попадании на него фотона с любой поляризацией, значит, необходимо найти полную вероятность прихода фотона на детектор D_1:

$$P_1 = \left(\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 = 0{,}5.$$

Ответ: 0,5.

Задача 2.4.7. Фотон в оптической схеме — 2 (15 баллов)

Темы: *оптические элементы, квантовое состояние фотона.*

Условие

Источник S испустил одиночный фотон в квантовом состоянии:

$$|\Psi\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}\,|H\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}}\,|V\rangle\,.$$

Определить числовой коэффициент при $|V\rangle$ на входе в детектор D_2 (рис. 2.4.2).

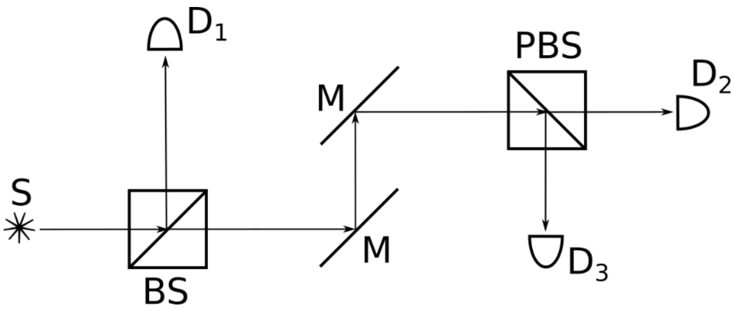


Рис. 2.4.2

Решение

Проследим за изменениями квантового состояния фотона на пути от источника до детектора D_2. При прохождении состояния $|\Psi\rangle$ через первый светоделитель вызывает интерес та часть, которая пройдет горизонтально; она при этом приобретает коэффициент $\sqrt{\frac{1}{2}}$. При каждом из двух отражений от зеркал M вектор состояния будет приобретать по (-1). Таким образом, до поляризационного светоделителя PBS дойдет состояние:

$$|\Psi'\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot (-1) \cdot (-1)\,|\Psi\rangle = \frac{1}{2}\,|H\rangle - \frac{1}{2}\,|V\rangle\,.$$

Поляризационный светоделитель отражает часть состояния с поляризацией V и пропускает часть с поляризацией H. То есть до детектора D_2 дойдет состояние:

$$|\Psi''\rangle = \frac{1}{2}\,|H\rangle\,.$$

Как видим, коэффициент при $|V\rangle$ равен нулю.

Ответ: 0.

Задача 2.4.8. Фотон в оптической схеме — 3 (15 баллов)

Темы: оптические элементы, квантовое состояние фотона.

Условие

Источник S испустил одиночный фотон в квантовом состоянии:

$$|\Psi\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}\,|H\rangle - \sqrt{\frac{1}{2}}\,|V\rangle\,.$$

Определить числовой коэффициент при $|V\rangle$ на входе в детектор D_3 (рис. 2.4.3).

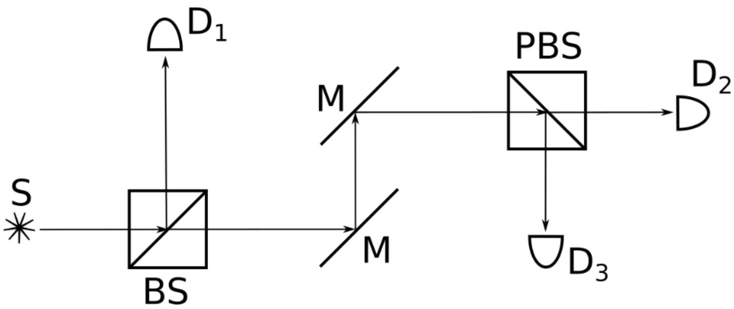


Рис. 2.4.3

Решение

Проследим за изменениями квантового состояния фотона на пути от источника до детектора D_2. При прохождении состояния $|\Psi\rangle$ через первый светоделитель вызывает интерес та часть, которая пройдет горизонтально; она при этом приобретает коэффициент $\sqrt{\frac{1}{2}}$. При каждом из двух отражений от зеркал M вектор состояния будет приобретать по (-1). Таким образом, до поляризационного светоделителя PBS дойдет состояние:

$$|\Psi'\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}\cdot(-1)\cdot(-1)\,|\Psi\rangle = \frac{1}{2}\,|H\rangle - \frac{1}{2}\,|V\rangle\,.$$

Поляризационный светоделитель отражает часть состояния с поляризацией V и пропускает часть с поляризацией H. То есть до детектора D_3 дойдет состояние:

$$|\Psi''\rangle = \frac{1}{2}\,|V\rangle\,.$$

Детектор срабатывает при попадании в него фотона с любой поляризацией, поэтому для нахождения следует возвести в квадрат модуль коэффициента при единственной оставшейся компоненте $|V\rangle$, что даст $1/4$.

Ответ: 0,25.

3. Второй отборочный этап

3.1. Работа наставника НТО на этапе

На втором отборочном этапе НТО участникам предстоит решать как индивидуальные, так и командные задачи в рамках выбранного профиля. Подготовка к этому этапу требует от них не только глубокого понимания предметной области, но и умения работать в команде, эффективно распределять роли и применять полученные знания на практике. Наставник играет здесь важную роль — он помогает участникам выстроить осмысленную и целенаправленную траекторию подготовки.

Вот основные направления, в которых наставник может поддержать участника:

- **Подготовка по образовательным программам НТО.** Наставник может готовить участников, используя готовые образовательные программы по технологическим направлениям, рекомендованные организаторами, а также адаптировать их под уровень подготовки школьников.
- **Разбор заданий прошлых лет.** Изучение задач второго отборочного этапа прошлых лет помогает участникам понять формат заданий, определить типовые ошибки и выработать стратегии решения.
- **Онлайн-курсы.** Участники могут пройти курсы по разбору задач прошлых лет или курсы, рекомендованные разработчиками отдельных профилей. Наставник может включить эти курсы в план подготовки, а также сопровождать процесс изучения и помогать с возникшими вопросами.
- **Анализ материалов профиля.** Совместный разбор методических материалов, размещенных на страницах профилей, помогает уточнить требования к участникам и направить подготовку на ключевые темы.
- **Практикумы.** Это важный элемент подготовки, позволяющий применять знания на практике. Наставник может:
  - ◇ организовать практикумы по методическим материалам с сайта профиля;
  - ◇ декомпозировать задачи заключительного этапа прошлых лет на отдельные элементы и проработать их с участниками;
  - ◇ провести анализ требуемых профессиональных компетенций и спланировать занятия для развития наиболее значимых из них;
  - ◇ направить участников на практикумы и мероприятия от организаторов, которые анонсируются в официальных сообществах НТО, например, в телеграм-канале для наставников: https://t.me/kruzhok_association.
- **Командная работа.** Одной из ключевых задач наставника на втором этапе является помощь в формировании команды или в поиске подходящей. Наставник может помочь участникам определить их сильные стороны, выбрать роль в команде и сориентироваться в процессе командообразования, включая участие в бирже команд в рамках конкретного профиля.

Если участники не прошли отборочный этап

Случается, что несмотря на усилия и серьезную подготовку, участники не проходят во второй или заключительный этап Олимпиады. В такой ситуации особенно важна поддержка наставника.

- **Поддержка и признание усилий.** Наставнику важно подчеркнуть ценность пройденного пути: полученные знания, навыки, преодоленные трудности и личностный рост. Это помогает участникам сохранить мотивацию и не воспринимать результат как окончательное поражение.
- **Рефлексия.** Полезно организовать встречу для обсуждения впечатления от участия, трудности, с которыми столкнулись школьники и то, что они узнали о себе и команде. Наставник может направить разговор в конструктивное русло: какие выводы можно сделать? Что сработало хорошо? Что можно улучшить?
- **Анализ ошибок и пробелов.** Наставник вместе с участниками анализирует, какие темы вызвали наибольшие затруднения, чего не хватило в подготовке — теоретических знаний, практических навыков, командного взаимодействия. Это позволяет выстроить более эффективную стратегию на будущее.
- **Планирование дальнейшего пути.** Участникам можно предложить:
  - ◇ продолжить углубленное изучение профиля или смежных направлений;
  - ◇ заняться проектной деятельностью, которая укрепит знания и навыки;
  - ◇ сформировать план по подготовке к следующему циклу НТО, начиная с работы над типовыми заданиями и курсами.
- **Создание устойчивой мотивации.** Важно показать школьникам, что участие в НТО — это не просто соревнование, а часть большого образовательного маршрута. Даже неудачный результат может стать толчком к профессиональному росту, если воспринимать его как точку развития, а не как конец пути.

Таким образом, наставник помогает участникам не только готовиться к этапам НТО, но и справляться с неудачами, выстраивать долгосрочную стратегию и сохранять интерес к инженерному и технологическому творчеству.

3.2. Инженерный тур

Задачи второго отборочного этапа направлены на формирование у участников знаний и компетенций, необходимых для выполнения комплексной инженерной задачи заключительного этапа. Они разбиты на четыре блока:

1. Излучение в оптоволоконной линии: набор задач этого блока знакомит участников с понятийным и вычислительным аппаратом, необходимым для описания лазерного импульса в оптоволоконной линии.
2. Волоконный интерферометр: набор задач этого блока проверяет, насколько хорошо участники усвоили материал первого отборочного этапа, касающийся квантового состояния одиночного фотона в интерферометрической схеме, а также формирует представление о некоторых особенностях волоконного исполнения оптических схем.
3. Распределение вероятностей: третий набор задач предлагает участникам освоить базовые понятия теории вероятностей, научиться применять математический аппарат к описанию дискретных и непрерывных физических величин.
4. Тест на случайность: последний блок состоит из одной задачи, посвященной обработке данных и программированию. Участникам предстоит изучить различные виды тестов, позволяющих различать случайные и псевдослучайные последовательности, а также реализовать эти тесты в программном коде.

3.2.1. Командные задачи

Командные задачи второго этапа инженерного тура открыты для решения. Соревнование доступно на платформе Яндекс.Контест: https://contest.yandex.ru/contest/69920/enter/.

Излучение в оптоволоконной линии

Задача 3.2.1.1. Излучение в оптоволоконной линии — 1 (7 баллов)

Темы: волновая оптика, распространение излучения в среде.

Импульсный источник лазерного излучения подключен к оптоволоконной линии. Длина оптоволоконной линии — 5 км, ширина лазерного импульса по основанию — 2 нс. Определить, какую длину занимает импульс в волокне. Показатель преломления оптоволокна считать равным 1,47, скорость света в вакууме считать равной $3 \cdot 10^8$ м/с. Ответ выразить в метрах и указать с точностью до сотых.

Решение

Длину импульса можно определить, умножив скорость распространения излучения в оптоволокне на ширину импульса (его длительность):

$$l = \frac{c}{n} \cdot t = \frac{3 \cdot 10^8}{1{,}47} \cdot 2 \cdot 10^{-9} = 0{,}408 = 0{,}41 \text{ м}.$$

Ответ: 0,41 м.

Задача 3.2.1.2. Излучение в оптоволоконной линии — 2 (8 баллов)

Темы: волновая оптика, распространение излучения в среде.

Условие

Импульсный источник лазерного излучения подключен к оптоволоконной линии. Длина оптоволоконной линии — 5 км, ширина лазерного импульса по основанию — 2 нс. Определить, какое количество импульсов поместится в волокне, если частота генерации импульсов 500 МГц. Показатель преломления оптоволокна считать равным 1,47, скорость света в вакууме считать равной $3 \cdot 10^8$ м/с.

Решение

По заданной частоте генерации импульсов можно определить промежуток времени между двумя импульсами:

$$t = \frac{1}{500 \cdot 10^6} = 2 \cdot 10^{-9}\,\text{с},$$

то есть импульсы следуют сразу друг за другом. Тогда общее число импульсов можно определить простым делением:

$$N = \frac{L}{l} = \frac{5\,000}{0{,}41} = 12\,195.$$

Ответ: 12 195.

Задача 3.2.1.3. Излучение в оптоволоконной линии — 3 (12 баллов)

Темы: волновая оптика, распространение излучения в среде.

Условие

Импульсный источник лазерного излучения подключен к оптоволоконной линии. Длина оптоволоконной линии — 5 км, ширина лазерного импульса по основанию — 2 нс. Определить, какое количество импульсов поместится в волокне, если рабочий цикл равен 0,3. Показатель преломления оптоволокна считать равным 1,47.

Решение

Рабочий цикл:

$$D = \frac{t}{T},$$

где t — ширина импульса по основанию, T — период. Тогда количество импульсов, которые поместятся в оптическое волокно:

$$N = \frac{L \cdot n \cdot D}{c \cdot t},$$

где L — длина волоконной линии 5 000 м, n — показатель преломления 1,47, c — скорость света $3 \cdot 10^8$ м/с.

$$N = \frac{5\,000 \cdot 1{,}47 \cdot 0{,}3}{3 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 10^{-9}} = 3\,675.$$

Ответ: 3 675.

Волоконный интерферометр

Задача 3.2.1.4. Волоконный интерферометр — 1 (4 балла)

Темы: квантовое состояние, нормировка вектора состояния.

Условие

На вход в волоконный интерферометр подается фотон в состоянии $N(2\,|H\rangle - |V\rangle)$. Определить N. Ответ привести с точностью до четвертого знака после запятой.

Решение

Коэффициент нормировки должен подбираться таким образом, чтобы сумма квадратов модулей коэффициентов при $|H\rangle$ и $|V\rangle$ была равна 1. Отсюда получаем уравнение:

$$|N|^2(4+1) = 1 \Rightarrow N = \frac{1}{\sqrt{5}} = 0{,}4472.$$

Ответ: 0,4472.

Задача 3.2.1.5. Волоконный интерферометр — 2 (7 баллов)

Темы: квантовое состояние, оптические элементы, вероятностная интерпретация квантовой механики.

Условие

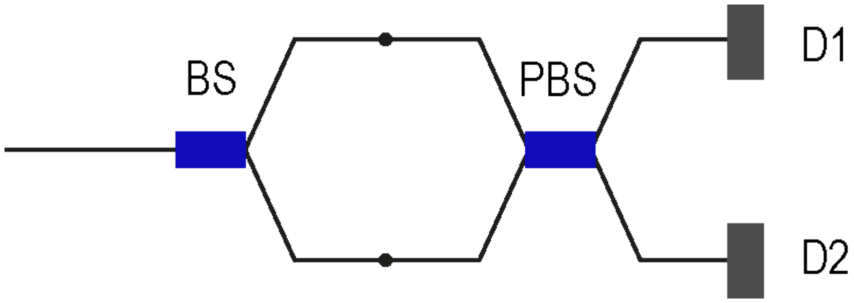


Рис. 3.2.1

На вход в волоконный интерферометр подается фотон в состоянии $N(2\,|H\rangle - |V\rangle$ (N — из задания 3.2.1.4). BS — волоконный делитель 50/50, PBS — поляризационный делитель, организованный как призма с четырьмя коллиматорами. С какой вероятностью сработает детектор $D1$? Ответ привести с точностью до одного знака после запятой.

Решение

При прохождении фотона через волоконный делитель 50/50 происходит простое разделение вероятности прохождения по верхнему и нижнему плечу интерферометра, без скачка фазы. При подключении оптоволокна к PBS, реализованному указанным образом, для каждого из плеч интерферометра происходит разделение состояния фотона на вертикальное (со скачком фазы на π) и горизонтальное.

Таким образом, на детектор $D1$ придет состояние:

$$|\psi\rangle \to \frac{|\psi\rangle}{\sqrt{2}}(\text{верхний}) + \frac{|\psi\rangle}{\sqrt{2}}(\text{нижний}) \to$$
$$\to \frac{|V\rangle}{\sqrt{10}}(\text{с верхнего плеча}) + \frac{2\,|H\rangle}{\sqrt{10}}(\text{с нижнего плеча}).$$

Отсюда получаем полную вероятность срабатывания детектора $D1$ как:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{10}}\right)^2 = \frac{1}{10} + \frac{4}{10} = \frac{5}{10} = 0{,}5.$$

Ответ: 0,5.

Задача 3.2.1.6. Волоконный интерферометр — 3 (7 баллов)

Темы: квантовое состояние, оптические элементы, вероятностная интерпретация квантовой механики.

Условие

На вход в волоконный интерферометр подается фотон в состоянии $N(2\,|H\rangle - |V\rangle)$ (N — из задания 3.2.1.4). BS — волоконный делитель 50/50, PBS — поляризационный делитель, организованный как призма с четырьмя коллиматорами. С какой вероятностью на детектор $D2$ придет фотон с вертикальной поляризацией? Ответ привести с точностью до одного знака после запятой.

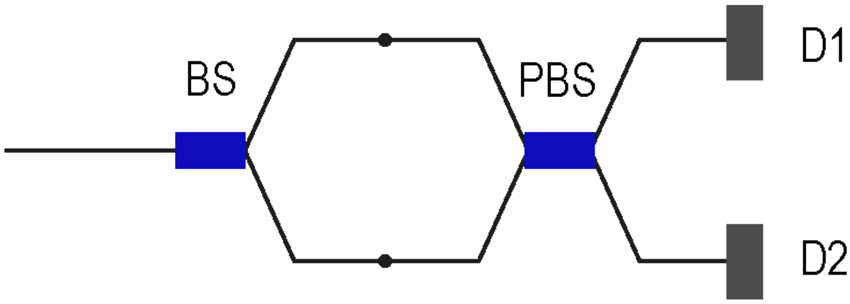


Рис. 3.2.2

Решение

При прохождении фотона через волоконный делитель 50/50 происходит простое разделение вероятности прохождения по верхнему и нижнему плечу интерферометра, без скачка фазы. При подключении оптоволокна к PBS, реализованному указанным образом, для каждого из плеч интерферометра происходит разделение состояния фотона на вертикальное (со скачком фазы на π) и горизонтальное.

Таким образом, на детектор $D2$ придет состояние:

$$|\psi\rangle \to \frac{|\psi\rangle}{\sqrt{2}}(\text{верхний}) + \frac{|\psi\rangle}{\sqrt{2}}(\text{нижний}) \to$$
$$\to -\frac{|V\rangle}{\sqrt{10}}(\text{с нижнего плеча}) + \frac{2\,|H\rangle}{\sqrt{10}}(\text{с верхнего плеча}).$$

Отсюда получаем вероятность прихода фотона с вертикальной поляризацией на детектор $D2$ как:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2 = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

Ответ: 0,1.

Распределение вероятностей

Задача 3.2.1.7. Распределение вероятностей — 1 (7 баллов)

Темы: случайные события, распределение вероятностей.

Условие

Аттенюатор в лазерной системе настроен таким образом, что в одном лазерном импульсе содержится в среднем один фотон. Определить, в скольких импульсах из 100 будет содержаться ровно один фотон.

Решение

Случайные дискретные события описываются распределением Пуассона:

$$P(n_p, \mu) = \frac{\mu^{n_p}}{n_p!} \cdot \exp(-\mu),$$

где $\exp(a) = e^a$.

Число однофотонных импульсов можно определить, зная вероятность P генерации импульса с $n_p = 1$ фотоном при среднем числе фотонов в импульсе $\mu = 1$:

$$P = \frac{1^1}{1!} \cdot \exp(-1) = 0{,}37.$$

Значит, из 100 импульсов 37 будут однофотонными.

Ответ: 37.

Задача 3.2.1.8. Распределение вероятностей — 2 (5 баллов)

Темы: случайные события, распределение вероятностей.

Условие

Генератор случайных чисел выбирает целые числа на отрезке $[1, 10]$. Распределение вероятности генератора — равномерное. Какова вероятность того, что при запуске генератора выпадет число 4? Ответ дать с точностью до десятых.

Решение

При заданных условиях работы генератора возможно 10 равновероятных исходов его запуска. Поэтому для любого числа из заданного отрезка вероятность его выпадения будет равна:

$$P = \frac{1}{10} = 0{,}1.$$

Ответ: 0,1.

Задача 3.2.1.9. Распределение вероятностей — 3 (5 баллов)

Темы: случайные события, распределение вероятностей.

Условие

Генератор случайных чисел выдает действительные числа на отрезке $[1, 10]$. Распределение вероятности генератора — равномерное. Какова вероятность того, что при запуске генератора выпадет число 4? Ответ дать с точностью до десятых.

Решение

При заданных условиях работы генератора возможно бесконечное число равновероятных исходов его запуска. Поэтому для любого конкретного числа из заданного отрезка вероятность его выпадения будет равна 0.

Ответ: 0,0.

Задача 3.2.1.10. Распределение вероятностей — 4 (8 баллов)

Темы: случайные события, распределение вероятностей.

Условие

Генератор случайных чисел выбирает действительные числа, сэмплируя распределение Гаусса со средним значением $\mu = 0{,}5$ и дисперсией $\sigma^2 = 4$. Определить, с какой вероятностью сгенерированное устройством число попадет в промежуток от 3σ до $3{,}5\sigma$? Ответ привести с точностью до четырех знаков после запятой.

Решение

Распределение Гаусса задается выражением:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right),$$

где $\exp(a) = e^a$.

Вероятность сгенерировать число в заданном промежутке определяется выражением:

$$P = \int_{3\cdot 2}^{3{,}5\cdot 2} \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 2^2}} \exp\left(-\frac{(x-0{,}5)^2}{2\cdot 2^2}\right) dx = 0{,}0024.$$

Ответ: 0,0024.

Тест на случайность

Задача 3.2.1.11. Тест на случайность (30 баллов)

Темы: случайные события, генератор случайных чисел, равномерное распределение.

Критерии оценивания

30 баллов — за 2 теста, 20 баллов — за 1 тест.

Условие

Даны 10 битовых последовательностей (строки из `0` и `1`). Одна из них создана генератором истинных случайных чисел (`TRNG`) и имеет равномерное распределение битов, а остальные выбраны генераторами псевдослучайных чисел (`PRNG`) и имеют квазипериодическую структуру: https://disk.yandex.ru/d/zLMimECE7Li4MQ.

Задача — написать программу, которая определяет последовательность, выданную истинным генератором случайных чисел, без построения графиков. Необходимо использовать статистические методы для анализа последовательностей и определить, какая из них ближе всего к равномерному распределению.

Программа должна возвращать одно единственное число — номер последовательности, созданной генератором истинных случайных чисел.

Указание: для определения истинно случайной последовательности рекомендуется использовать не менее двух различных способов (тестов), так как оценка только по одному признаку может привести к неверному выводу.

Решение

Есть три простых варианта решения и еще множество сложных:

1. прогонный тест,
2. расчет параметра χ^2,
3. расчет автокорреляционной функции — для равномерного распределения она будет иметь наименьшее значение.

Пример решения (все три способа):

Python

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.stats import chisquare

def read_binary_sequence(file_path):
    with open(file_path, 'r') as file:
        sequence = [int(bit) for bit in file.read().strip() if bit in '01']
    return sequence

def runs_test(sequence):
    """Perform the Runs Test on a binary sequence."""
    n = len(sequence)
    if n == 0:
        return 0, 0, 0

    # Count the number of runs
    runs = 1
    for i in range(1, n):
        if sequence[i] != sequence[i - 1]:
            runs += 1

    # Calculate proportions of 0s and 1s
    p1 = np.sum(sequence) / n  # Proportion of 1s
```

```python
    p0 = 1 - p1  # Proportion of 0s

    # Calculate expected number of runs
    expected_runs = (2 * p1 * p0 * n) / (p1 + p0) + 1

    # Calculate variance of runs
    variance_runs = (2 * p1 * p0 * (2 * p1 * p0 - n)) / (n**2 * (p1 + p0 - 1))

    # Calculate Z-score
    z = (runs - expected_runs) / np.sqrt(variance_runs) if variance_runs > 0 else 0

    return runs, expected_runs, z

def chi_squared_test(sequence):
    """ Chi-Squared test"""
    observed = [np.sum(sequence), len(sequence) - np.sum(sequence)]
    expected = [len(sequence) / 2, len(sequence) / 2]
    chi2_stat, p_value = chisquare(observed, expected)
    return chi2_stat, p_value

def autocorrelation_test(sequence, lag=1):
    """Autocorrelation"""
    n = len(sequence)
    if n <= lag:
        return 0

    mean = np.mean(sequence)
    c0 = np.sum((sequence - mean) ** 2) / n
    c1 = np.sum((sequence[:-lag] - mean) * (sequence[lag:] - mean)) / (n - lag)

    return c1 / c0

file_paths = [
    'pattern_sequence_1.txt',
    'pattern_sequence_2.txt',
    'pattern_sequence_3.txt',
    'pattern_sequence_4.txt',
    'pattern_sequence_5.txt',
    'pattern_sequence_6.txt',
    'pattern_sequence_7.txt',
    'pattern_sequence_8.txt',
    'lfsr_sequence_1.txt',
    'true_random.txt'
]

results = []

for file_path in file_paths:
    sequence = read_binary_sequence(file_path)

    runs, expected_runs, z = runs_test(sequence)
    chi2_stat, p_value = chi_squared_test(sequence)
    autocorr = autocorrelation_test(sequence)

    results.append({
        'file_path': file_path,
        'runs': runs,
```

```
        'expected_runs': expected_runs,
        'z': z,
        'chi2_stat': chi2_stat,
        'p_value': p_value,
        'autocorr': autocorr
    })


most_random_sequence = None
best_score = -np.inf

for result in results:

    score = 0


    score += 1 - abs(result['z'])


    if result['p_value'] > 0.05:
        score += 1


    score += 1 - abs(result['autocorr'])


    if score > best_score:
        best_score = score
        most_random_sequence = result['file_path']


for result in results:
    print(f"Results for {result['file_path']}:")
    print(f"  Runs = {result['runs']}, Expected Runs = {result['expected_runs']:.2f}, Z-score = {result['z']:.2f}")
    print(f"  Chi2 Stat = {result['chi2_stat']:.2f}, p-value = {result['p_value']:.4f}")
    print(f"  Autocorrelation (lag=1) = {result['autocorr']:.4f}\n")

print(f"The most random sequence based on the criteria is: {most_random_sequence}")

```

Другие способы по желанию, но не обязательно.

Генератор Python проходит все три статистических теста, которые предлагаются здесь для решения, другие две последовательности — нет.

Таким образом, получаем упрощенную модель реального тестирования на случайность QRNG (квантовый генератор случайных чисел), где генератор Python выступает в качестве QRNG, а остальные варианты — как PRNG.

Ответ: 6.

4. Заключительный этап

4.1. Работа наставника НТО при подготовке к этапу

На этапе подготовки к заключительному этапу НТО наставник решает две важные задачи: помощь участникам в подготовке к предстоящим соревнованиям и формирование устойчивой и слаженной команды. Заключительный этап требует высокой слаженности, уверенности и глубоких знаний, и наставник становится тем, кто объединяет усилия участников и направляет их в нужное русло.

Наставник помогает участникам:

- разобрать задания прошлых лет, используя официальные сборники, чтобы понять структуру финальных испытаний, типы задач и ожидаемый уровень сложности;
- изучить организационные особенности заключительного этапа, включая формат проведения, регламент, продолжительность и технические нюансы;
- спланировать подготовку — на основе даты начала финала составляется четкий график занятий, в котором распределены темы, практикумы и командные тренировки;
- обратиться (при необходимости) за консультацией к разработчикам заданий по профилю, уточнить, на какие аспекты подготовки следует обратить особое внимание, и получить дополнительные материалы.

Также рекомендуется участие в мероприятиях от организаторов, таких как:

- установочные вебинары и открытые разборы задач;
- хакатоны, практикумы и мастер-классы для финалистов;
- встречи в онлайн-формате, информация о которых публикуется в группе НТО во «ВКонтакте» и в телеграм-чатах профилей.

Наставнику необходимо уделить внимание работе на формированием устойчивой, продуктивной и мотивированной команды:

- **Сплочение команды.** Это особенно актуально, если участники живут в разных городах. Регулярные онлайн-встречи, совместная работа над задачами и неформальное общение помогают наладить доверие и улучшить командную динамику.
- **Анализ ролей.** Наставник вместе с командой определяет, кто за что отвечает, какие задачи входят в зону ответственности каждого участника. Также обсуждаются возможности взаимозаменяемости на случай непредвиденных ситуаций.
- **Оценка компетенций.** Важно определить, какими знаниями и навыками уже обладают участники, а какие необходимо развить. На основе этого формируется индивидуальный и командный план подготовки.
- **Участие в подготовительных мероприятиях от разработчиков профилей.**

Перед заключительным этапом проводятся установочные вебинары, разборы задач прошлых лет, практикумы, мастер-классы для финалистов. Информация о таких мероприятиях публикуется в группе НТО в VK и в чатах профилей в Telegram.

- **Практика в формате хакатонов.** Наставник может организовать дистанционные хакатоны или практикумы с использованием заданий прошлых лет и методических рекомендаций из официальных сборников.

Таким образом, наставник становится координатором и моральной опорой команды, помогая пройти заключительный этап НТО с максимальной уверенностью и результатом.

4.2. Предметный тур

Задачи третьего этапа предметного тура профиля по информатике открыты для решения. Участие в соревновании доступно на платформе Яндекс.Контест: https://contest.yandex.ru/contest/72667/enter/.

4.2.1. Информатика. 8–11 классы

Задача 4.2.1.1. Взвешивание гирек (10 баллов)

Имя входного файла: стандартный ввод или `input.txt`.

Имя выходного файла: стандартный вывод или `output.txt`.

Ограничение по времени выполнения программы: 1 с.

Ограничение по памяти: 64 Мбайт.

Условие

Имеются три гирьки одинаковые на вид, но, возможно, имеющие различную массу. Масса каждой из гирек может быть равна 1, 2, 3, 5 или 10 г. Обозначим массы гирек за x, y и z. Если положить первую и вторую гирьки на одну чашку электронных весов, то окажется, что их масса равна a г. Если аналогично взвесить первую и третью гирьки, то их масса будет равна b г. Формально это означает, что имеют место равенства $x + y = a$ и $x + z = b$.

Напишите программу, которая найдет любые возможные массы гирек x, y и z по известным числам a и b. Программа должна ответить на t независимых запросов во входных данных.

Формат входных данных

В первой строке на вход поступает одно целое число t — количество запросов, $1 \leqslant t \leqslant 100$.

Далее в t строках записаны сами запросы, по одному в каждой строке. Каждый запрос содержит два числа a и b. Гарантируется, что эти числа таковы, что существует хотя бы один допустимый ответ.

Формат выходных данных

Выведите t строк с ответами на запросы. Каждый ответ должен содержать три натуральных числа x, y и z. Числа должны быть записаны в указанном порядке. Если возможно несколько ответов, то вывести можно один любой.

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод
3 7 6 20 20 6 4

Стандартный вывод
5 2 1 10 10 10 1 5 3

Примечания

В третьем тестовом случае допустимы два правильных ответа: $(1, 5, 3)$ и $(3, 3, 1)$.

Решение

Наиболее простой способ решения этой задачи заключается в переборе всех возможных значений x. По выбранному значению x найдем y и z. Если найденные значения допустимы, то выводим ответ и прерываем цикл.

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке Python.

Python

```
t = int(input())
w = [10,5,3,2,1]
for _ in range(t):
    a, b = map(int,input().split())
    for x in w:
        y = a - x
        z = b - x
        if y in w and z in w:
            print(x,y,z)
            break
```

Критерии оценивания

Тест с номером 1 совпадает с тестом из условия задачи. Баллы за него не начисляются.

Успешное прохождение каждого теста с номерами 2–11 оценивается в 1 балл.

Задача 4.2.1.2. Кронекерово произведение (15 баллов)

Имя входного файла: стандартный ввод или `input.txt`.

Имя выходного файла: стандартный вывод или `output.txt`.

Ограничение по времени выполнения программы: 1 с.

Ограничение по памяти: 256 Мбайт.

Условие

В некоторых областях квантовых вычислений используется понятие произведения Кронекера двух матриц.

Если

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{pmatrix},$$

то их произведение Кронекера определяется как блоковая матрица следующего вида:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & \cdots & a_{nn}B \end{pmatrix}.$$

Например, для $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ их произведение Кронекера будет равно:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1\cdot 5 & 1\cdot 6 & 2\cdot 5 & 2\cdot 6 \\ 1\cdot 7 & 1\cdot 8 & 2\cdot 7 & 2\cdot 8 \\ \hline 3\cdot 5 & 3\cdot 6 & 4\cdot 5 & 4\cdot 6 \\ 3\cdot 7 & 3\cdot 8 & 4\cdot 7 & 4\cdot 8 \end{array}\right).$$

Блоки матрицы здесь выделены линиями для наглядности.

В этой задаче мы рассмотрим матрицу A следующего вида:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и найдем последовательность ее степеней Кронекера $A^1 = A$, $A^2 = A \otimes A$, $A^3 = A \otimes A^2$ и так далее.

Для примера запишем A^2 и A^3.

$$A^2 = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

$$A^3 = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Как видно из определения, такие матрицы будут состоять из нулей и единиц.

Напишите программу, которая по номеру строки r и номеру столбца c найдет $A^n[r,c]$, то есть элемент, который находится в матрице A^n в указанной позиции. Программа должна дать ответ для m различных позиций в одной матрице.

Формат входных данных

В первой строке на вход поступают два натуральных числа n и m — степень матрицы и количество позиций, для которых требуется найти ответ, $1 \leqslant n \leqslant 60$, $1 \leqslant m \leqslant \min(2^{2n}, 200\,000)$.

Далее в m строках записаны по два числа r_i и c_i — номер строки и номер столбца в матрице A^n, $1 \leqslant r_i, c_i \leqslant 2^n$.

Формат выходных данных

Выведите m чисел 0 или 1 в одной строке через пробел. Число с номером i должно быть равно элементу матрицы $A^n[r_i, c_i]$.

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод
1 4 1 1 1 2 2 1 2 2

Стандартный вывод
1 1 1 0

Пример №2

Стандартный ввод
3 6 1 7 2 2 5 3 8 8 4 5 2 6

Стандартный вывод
1 0 1 0 1 0

Решение

В матрице порядка n 2^n строк и столбцов. Сравнив номер строки и столбца с 2^{n-1}, можно узнать, в какой четверти матрицы находится искомая позиция. Если она в нижней правой четверти, то ответом будет 0. Во всех остальных случаях можно найти координаты искомой позиции в матрице порядка $n-1$, отняв при необходимости от номера строки или столбца 2^{n-1}. Этот процесс можно повторять в цикле, пока порядок матрицы больше единицы.

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке Python.

Python

```python
n,m = map(int,input().split())
for _ in range(m):
    r,c=map(int,input().split())
    for i in range(n-1,-1,-1):
        if r > 2**i and c > 2**i:
            print(0,end=' ')
            break
        else:
            if r> 2**i:
                    r -= 2**i
            if c > 2**i:
                    c -= 2**i
    else:
        print(1,end=' ')
```

Критерии оценивания

Тесты с номерами 1–2 совпадают с тестами из условия задачи. Баллы за них не начисляются.

Успешное прохождение каждого теста с номерами 3–17 оценивается в 1 балл.

В тестах с номерами 3–9 степень матрицы n равна номеру теста минус один.

В тестах с номерами 10–12 количество позиций, для которых требуется найти ответ, не превосходит 100.

Задача 4.2.1.3. Несчастливое число (20 баллов)

Имя входного файла: стандартный ввод или `input.txt`.

Имя выходного файла: стандартный вывод или `output.txt`.

Ограничение по времени выполнения программы: 1 с.

Ограничение по памяти: 256 Мбайт.

Условие

Алиса разрабатывает новую систему счисления. Она будет двоичной, то есть для записи чисел будут использоваться только цифры 0 и 1. Также она будет позиционной, то есть значение каждой цифры будет зависеть от ее позиции.

Алиса собирается подобрать некоторый набор оснований $x_1, \ldots, x_n$, тогда запись $(a_n a_{n-1} \cdots a_1)_{alice}$ будет задавать число $a_n x_n + a_{n-1} x_{n-1} + \cdots + a_1 x_1$.

Например, для набора оснований $1, 2, 3, 7, 10$ запись $(11001)_{alice}$ будет задавать число $1 \cdot 10 + 1 \cdot 7 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 18$. Некоторые основания в системе счисления Алисы могут повторяться.

Алиса разрабатывает эту систему не просто для развлечения, она хочет с ее помощью решить все проблемы человечества! Алиса убеждена, что все беды происходят от одного несчастливого числа k, поэтому целью является разработка такой системы счисления, в которой нельзя будет записать число k, а все остальные натуральные числа от 1 до m — можно. (К сожалению, Алиса пока не понимает, что отсутствие алгебраической замкнутости в кольце целых чисел станет источником гораздо более страшных проблем, но мы не будем винить ее за это.)

Напишите программу, которая подберет набор оснований для системы счисления Алисы по заданным числам m и k. Разумеется, Алиса хочет, чтобы числа в ее системе счисления записывались как можно короче, поэтому **искомый набор оснований должен иметь минимальную длину**. В итоге программа должна дать ответ для t независимых тестовых случаев.

Формат входных данных

В первой строке на вход поступает одно целое число t — количество запросов, $1 \leqslant t \leqslant 10\,000$. Далее в t строках записаны сами запросы, по одному в каждой строке. Каждый запрос содержит два числа m — максимальное число в диапазоне Алисы и k — несчастливое число, $1 \leqslant k < m \leqslant 10^{18}$.

Формат выходных данных

Выведите $2t$ строк с ответами на запросы, каждый ответ должен занимать две строки. Первая строка ответа должна содержать одно натуральное число n — количество оснований в системе счисления. Вторая строка должна содержать сами основания $x_1, \ldots, x_n$. В случае существования нескольких правильных ответов можно вывести любой из них. Числа можно выводить в любом порядке, они могут повторяться.

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод
4 100 13 20 5 10 1 8 7

Стандартный вывод
8 1 2 4 5 14 20 33 50 6 1 1 2 6 11 16 4 2 3 4 8 4 1 2 3 8

Примечания

В первом тестовом случае из заданного набора оснований нельзя получить число 13, так как сумма всех чисел, меньших, чем 13, равна 12.

Все остальные числа получить можно, например, число 100 можно получить в виде суммы $1 + 2 + 14 + 33 + 50$.

Решение

Рассмотрим процесс выбора оснований для получения чисел, меньших k. Первым основанием возьмем 1. Теперь пусть существующий набор оснований позволяет получить все числа в диапазоне $[0; s]$. Тогда в качестве следующего основания можно взять любое число, не превосходящее $s + 1$. Если обозначить его за y, то диапазон чисел расширится до $[0; s + y]$. Выгодно максимально расширить диапазон, но так, чтобы в него не попало число k. То есть в качестве y можно взять наибольшее число, удовлетворяющее неравенствам $y \leqslant k - 1 - s$ и $y \leqslant s + 1$. Объединяя их в одно, получим $y = \min(s + 1, k - 1 - s)$. Процесс выбора оснований надо продолжать, пока $s < k - 1$.

Теперь рассмотрим процесс выбора оснований для чисел, больших k. Первым основанием возьмем $k+1$. Это позволит получить все числа вида $k+1+a$, где $a \in [0; k-1]$. Таким образом, теперь можно получить все числа из $X = [0; k - - 1] \cup [k+1, 2k]$. Вновь следующим основанием выгодно взять наибольшее, кроме k, число, не принадлежащее множеству X, то есть $2k+1$.

Теперь дополнительно можно получить все числа вида $2k+1+a$, где $a \in X$.

$$X' = X \cup [2k+1; 3k] \cup [3k+2; 4k+1] = [0; k-1] \cup [k+1; 3k] \cup [3k+2; 4k+1].$$

Применяя аналогичные рассуждения, можно показать, что следующим основанием можно взять $3k+1$. Теперь можно получить все числа из X''.

$$X'' = X \cup [3k+1; 4k] \cup [4k+2; 6k+1] \cup [6k+3; 7k+2] = [0; k-1] \cup [k+1; 6k+1] \cup [6k+3; 7k+2].$$

Следующим основанием выгодно взять $6k+2$, и, применяя аналогичные рассуждения, можно показать, что каждое следующее основание будет вдвое больше предыдущего.

Таким образом, три первых основания это: $k+1$, $2k+1$, $3k+1$, а каждое следующее является удвоением предыдущего.

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке Python.

Python

```python
t = int(input())
for _ in range(t):
    n, k=map(int,input().split())
    ans = []
    s = 0
    while s<k-1:
       ans.append(min(s+1,k-1-s))
       s+=ans[-1]
    ans.append(k+1);
    if n>2*k:
        ans.append(2*k+1)
        if n>3*k:
            ans.append(3*k+1)
            while n>=2*ans[-1]:
                ans.append(2*ans[-1])
    print(len(ans))
    print(' '.join(map(str,ans)))
```

Критерии оценивания

Тест с номером 1 совпадает с тестом из условия задачи. Баллы за него не начисляются.

Успешное прохождение каждого теста с номерами 2–21 оценивается в 1 балл.

В тестах с номерами 2–11 несчастливое число k равно номеру теста минус один, а значение m не превышает 10 000.

В тестах с номерами 12–16 для всех тестовых случаев выполняется неравенство $k < m \leqslant 2k$.

Задача 4.2.1.4. Взвешивание монет (25 баллов)

Имя входного файла: стандартный ввод или `input.txt`.

Имя выходного файла: стандартный вывод или `output.txt`.

Ограничение по времени выполнения программы: 2 с.

Ограничение по памяти: 256 Мбайт.

Условие

У Алисы есть n монет, ровно одна из них фальшивая. Фальшивая монета отличается по весу от настоящих, то есть может быть легче или тяжелее. Имеются чашечные весы, при помощи которых можно сравнить вес двух наборов монет. Алиса пронумеровала все монеты числами от 1 до n, выполнила m взвешиваний, записала результаты и передала их вам.

По имеющимся результатам взвешиваний не всегда возможно точно определить фальшивую монету, поэтому Алиса хочет составить список номеров всех монет, которые могут быть фальшивыми. Формально монета с номером i может оказаться фальшивой, если могут быть получены заданные результаты взвешиваний в предположении, что веса всех монет, кроме i, совпадают, а монета i тяжелее других или, если веса всех монет, кроме i, совпадают, а монета i легче других.

Напишите программу, чтобы определить номера монет, которые могут быть фальшивыми.

Формат входных данных

В первой строке на вход подаются два натуральных числа n и m — количество монет и количество взвешиваний, $2 \leqslant n \leqslant 100\,000$, $1 \leqslant m \leqslant 100\,000$.

Далее в m строках записаны результаты взвешиваний. Описание каждого результата выполнено в следующем формате: список монет на левой чашке весов, пробел, символ операции, пробел, список монет на правой чашке весов.

Списки монет заключены в квадратные скобки. Номера монет разделены запятой и пробелом. Гарантируется, что:

- номера монет являются числами от 1 до n;
- количество чисел в левом и правом списках совпадает;
- наборы чисел в левом и правом списке не пересекаются;
- суммарное количество чисел во входных данных не превосходит 200 000.

В качестве символа операции могут использоваться следующие знаки: <, > или =, которые показывают, что вес монет в левой чашке меньше, больше или равен весу монет в правой чашке соответственно.

Гарантируется, что входные данные являются корректными и непротиворечивыми, то есть заданные результаты взвешиваний могут быть получены, если ровно одна монета является фальшивой.

Формат выходных данных

В первой строке выведите одно натуральное число k — количество монет, которые могут оказаться фальшивыми.

Во второй строке через пробел выведите номера монет **в порядке возрастания**.

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод

```
9 3
[4, 7] < [3, 2]
[9] = [1]
[2, 7, 6] > [3, 1, 5]
```

Стандартный вывод

```
1
2
```

Пример №2

Стандартный ввод

```
7 1
[7, 2] = [1, 4]
```

Стандартный вывод

```
3
3 5 6
```

Пример №3

Стандартный ввод

```
7 2
[7, 2] > [1, 4]
[4, 7] < [1, 2]
```

Стандартный вывод

```
2
2 4
```

Примечания

В первом тесте заданные результаты взвешиваний могут быть получены, если монета с номером 2 тяжелее остальных.

Во втором тесте монеты с номерами 1, 2, 4, 7 не могут быть фальшивыми, а об остальных монетах ничего неизвестно, значит, они могут быть фальшивыми.

В третьем тесте предположение о том, что монета с номером 2 тяжелее остальных не противоречит полученным результатам. Также результатам не противоречит предположение о том, что монета с номером 4 легче остальных.

Решение

Рассмотрим набор взвешиваний, результатом которых является неравенство. Если $L_1, \ldots, L_m$ — множества номеров монет, которые оказались легче, то фальшивой может быть одна из монет из пересечения этих множеств. Аналогичное утверждение можно сказать и множествах номеров монет $G_1, \ldots, G_m$, которые оказались тяжелее.

Отдельно рассмотрим набор взвешиваний, результатом которых является равенство. Если $E_1, \ldots, E_k$ — множества номеров монет, которые участвовали во взвешиваниях с равенством, то ни одна монета из объединения этих множеств не может быть фальшивой.

Теперь ответ можно получить по формуле

$$\left(\left(\bigcap_{i=1}^{m} L_i\right) \bigcup \left(\bigcap_{i=1}^{m} G_i\right)\right) \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k} E_i\right).$$

При реализации следует позаботиться о том, чтобы операции над множествами совершались со сложностью меньшего множества.

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке Python.

Python

```python
n, m = map(int,input().split())
less = set(range(1,n+1))
greater = set(range(1,n+1))
eq = set()
for _ in range(m):
    s = input()
    p = s.find(']')
    a = set(map(int,s[1:p].split(',')))
    b = set(map(int,s[p+5:-1].split(',')))
    if s[p+2]=='=':
        eq|=a
        eq|=b
    elif s[p+2]=='<':
        less &= a
        greater &= b
    else:
        less &= b
        greater &= a
ans = (less|greater)-eq
print(len(ans))
print(*sorted(list(ans)))
```

Критерии оценивания

Тесты с номерами 1–3 совпадают с тестами из условия задачи. Баллы за них не начисляются.

Успешное прохождение каждого теста с номерами 4–28 оценивается в 1 балл.

В тестах с номерами 4–8 количество монет не превосходит 100, а количество чисел во входных данных не превосходит 500.

В тестах с номерами 9–18 количество монет не превосходит 1 000, а количество чисел во входных данных не превосходит 10 000.

Задача 4.2.1.5. Кронекерово произведение 2 (30 баллов)

Имя входного файла: стандартный ввод или `input.txt`.

Имя выходного файла: стандартный вывод или `output.txt`.

Ограничение по времени выполнения программы: 1,5 с.

Ограничение по памяти: 256 Мбайт.

Условие

Внимание. Вводная часть в этой задаче совпадает с вводной частью задачи 4.2.1.2. Если вы решили задачу 4.2.1.2, то можете пропустить ее.

В некоторых областях квантовых вычислений используется понятие произведения Кронекера двух матриц. Если

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{pmatrix},$$

то их произведение Кронекера определяется, как блоковая матрица следующего вида:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & \cdots & a_{nn}B \end{pmatrix}.$$

Например, для $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ их произведение Кронекера будет равно:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1\cdot 5 & 1\cdot 6 & 2\cdot 5 & 2\cdot 6 \\ 1\cdot 7 & 1\cdot 8 & 2\cdot 7 & 2\cdot 8 \\ \hline 3\cdot 5 & 3\cdot 6 & 4\cdot 5 & 4\cdot 6 \\ 3\cdot 7 & 3\cdot 8 & 4\cdot 7 & 4\cdot 8 \end{array}\right).$$

Блоки матрицы здесь выделены линиями для наглядности.

В этой задаче рассмотрим матрицу A следующего вида

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и найдем последовательность ее степеней Кронекера $A^1 = A$, $A^2 = A \otimes A$, $A^3 = A \otimes A^2$ и так далее. Для примера запишем A^2 и A^3.

$$A^2 = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

$$A^3 = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Как видно из определения, такие матрицы будут состоять из нулей и единиц.

С этого места начинается оригинальное условие задачи.

Рассмотрим матрицу A^n и занумеруем все единицы в ней сверху вниз и слева направо. Например, для матрицы A^2 нумерация будет выглядеть следующим образом.

$$A^2 = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & * & 6 & * \\ \hline 7 & 8 & * & * \\ 9 & * & * & * \end{array}\right).$$

Здесь на позициях единиц стоят их порядковые номера. Нули в нумерации не участвуют и заменены звездочками.

Напишите программу, которая найдет позиции единиц в матрице A^n по их порядковым номерам.

Формат входных данных

В первой строке на вход поступают два натуральных числа n и m — порядок матрицы и количество номеров единиц, $1 \leqslant n \leqslant 38$, $1 \leqslant m \leqslant 100\,000$.

Во второй строке через пробел записаны m натуральных чисел $a_1, \ldots, a_m$ — номера единиц, $1 \leqslant a_i \leqslant 3^n$.

Формат выходных данных

В m строках выведите по два числа r_i и c_i — номер строки и номер столбца матрицы, в котором находится единица с порядковым номером a_i. Строки и столбцы матрицы A^n нумеруются, начиная с единицы, сверху вниз и слева направо.

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод

```
2 9
1 2 3 4 5 6 7 8 9
```

Стандартный вывод

```
1 1
1 2
1 3
1 4
2 1
2 3
3 1
3 2
4 1
```

Пример №2

Стандартный ввод

```
38 3
256711980439665054 564682175042572888 321752549611034335
```

Стандартный вывод

```
14898268353 240553579550
55902790145 140991532328
20547896451 5170319645
```

Решение

Запишем несколько формул, которые будут использоваться при решении задачи.

Суммарное количество единиц в матрице порядка n равно 3^n. Это легко понять, заметив, что при увеличении порядка матрицы на 1 количество единиц в ней увеличивается в три раза.

Далее будет удобнее считать, что нумерация строк и столбцов матрицы ведется с нуля.

Количество единиц в k-й строке матрицы порядка n можно найти по формуле

$$R(n,k) = \begin{cases} 1 & n = 0, \\ 2R(n-1,k) & k < 2^{n-1}, \\ R(n-1,k-2^{n-1}) & k \geqslant 2^{n-1}. \end{cases}$$

Для обоснования формулы можно привести такие рассуждения. Если k-я строка расположена в верхней половине матрицы, то надо найти количество единиц в этой же строке в матрице меньшего порядка и умножить результат на 2, поскольку в верхней половине состоит из двух матриц меньшего порядка. Нижняя половина состоит из одной матрицы меньшего порядка, поэтому результат не изменится.

Заметим, что умножение на 2 соответствует каждому нулю двоичной записи k, то есть $R(n,k) = 2^z$, где z — количество нулей в двоичной записи k с использованием ровно n разрядов.

Суммарное количество единиц в первых k строках матрицы порядка n можно найти по формуле

$$S(n,k) = \begin{cases} 0 & n = 0, \\ 2S(n-1,k) & k < 2^{n-1}, \\ 2 \cdot 3^{n-1} + S(n-1,k-2^{n-1}) & k \geqslant 2^{n-1}. \end{cases}$$

Для обоснования формулы можно привести такие рассуждения. Если k строк расположены в верхней половине матрицы, то надо найти количество единиц в матрице меньшего порядка и умножить результат на 2. Иначе k строк занимают верхнюю половину матрицы и $k-2^{n-1}$ строк из нижней половины. Количество единиц в верхней половине равно $2 \cdot 3^{n-1}$, а в нижней — $S(n-1,k-2^{n-1})$.

Можно модифицировать эту формулу для решения обратной задачи — найти наибольшее количество строк, в которых не более m единиц.

$$B(n,c) = \begin{cases} 0 & n = 0, \\ B(n-1,\lceil \frac{m}{2} \rceil) & m < 2 \cdot 3^{n-1}, \\ 2^{n-1} + B(n-1,m-2 \cdot 3^{n-1}) & m \geqslant 2 \cdot 3^{n-1}. \end{cases}$$

Далее запишем формулу для нахождения количества единиц среди c первых элементов в строке r матрицы порядка n.

$$F(n,r,c) = \begin{cases} 0 & n = 0, \\ F(n-1,r \mod 2^{n-1},c) & c < 2^{n-1}, \\ R(n-1,r \mod 2^{n-1}) + F(n-1,r \mod 2^{n-1},c-2^{n-1}) & c \geqslant 2^{n-1}. \end{cases}$$

Обоснование этой формулы можно выполнить той же схеме, как и в предыдущих случаях, с той разницей, что здесь рассматриваются случаи нахождения всех элементов только в левой части матрицы или в левой и правой.

Также можно записать и формулу для решения обратной задачи — нахождения наименьшего числа элементов в строке r в матрице порядка n, которые содержат ровно m единиц.

$$A(n,r,m) = \begin{cases} 0 & n = 0, \\ A(n-1, r \mod 2^{n-1}, m) & m < R(n-1, r \mod 2^{n-1}), \\ 2^{n-1} + A(n-1, r \mod 2^{n-1}, & \\ m - R(n-1, r \mod 2^{n-1})) & m \geqslant R(n-1, r \mod 2^{n-1}). \end{cases}$$

Используя эти формулы, можно записать решение. Сначала найдем номер строки матрицы по формуле $r = B(n,m)$. Далее найдем номер единицы в строке r по формуле $m' = m - S(n,r)$, и наконец найдем номер столбца по формуле $A(n,r,m')$.

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке Python.

Python

```python
pw = [2*3**(i) for i in range(40)]
def find_row(n, k):
    ans = 0
    while n>0:
        n-=1;
        if k<pw[n]:
            k//=2
        else:
            k-=pw[n]
            ans += 2**n
    return ans

def block_ones(n, row):
    ans = 0
    for i in range(n):
        if row%2 == 1:
            ans+=pw[i]
        else:
            ans*=2
        row//=2
    return ans

def find_col(n,row,k):
    c = 0
    ans=0
    for i in range(n):
         if row%2==0:
             if k%2==1:
                 ans+=2**i
             k//=2
             c+=1
         row//=2
    return ans

n, m = map(int,input().split())
for k in map(int,input().split()):
    row = find_row(n,k-1)
    print(row+1,find_col(n,row,k-1-block_ones(n,row))+1)
```

Критерии оценивания

Тесты с номерами 1–2 совпадают с тестами из условия задачи. Баллы за них не начисляются.

Успешное прохождение каждого теста с номерами 3–32 оценивается в 1 балл.

В тестах с номерами 3–10 степень матрицы n равна номеру теста. Эти тесты проверяют правильность работы программы для всех чисел с номерами от 1 до 3^n.

В тестах с номерами 11–17 степень матрицы n не превосходит 13, $m \leqslant 10\,000$.

В тестах с номерами 18–22 степень матрицы n не превосходит 18, $m \leqslant 10\,000$.

В тестах с номерами 23–27 степень матрицы n не превосходит 38, $m \leqslant 10\,000$.

4.2.2. Физика. 8–9 классы

Задача 4.2.2.1. Какое здесь соединение? (16 баллов)

Условие

Место на печатных платах лабораторного оборудования бывает весьма ограничено, и размещать на них элементы порой приходится в непривычном порядке. На некоторой плате собрана схема (см. рис. 4.2.1), состоящая из четырех приборов, которые при расчете цепи можно считать резисторами, и трех миниатюрных, но идеальных вольтметров, изображенная на рисунке. Определите показания этих вольтметров при подключении клемм цепи к источнику постоянного напряжения $U = 12$ В.

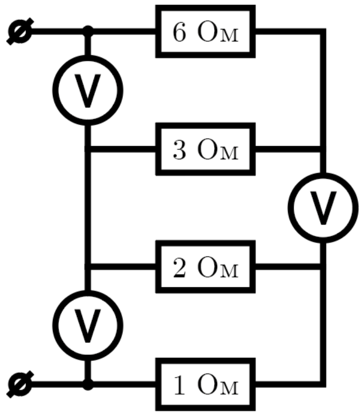


Рис. 4.2.1

Решение

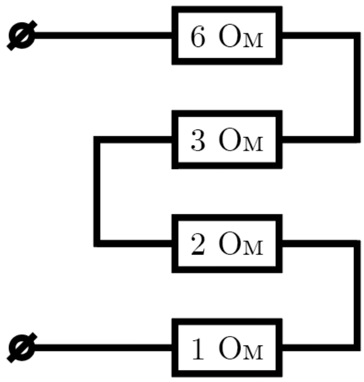


Рис. 4.2.2

Соединение резисторов может показаться параллельным, смешанным или даже коротким замыканием, если забыть, что сопротивление идеального вольтметра не очень мало, а, напротив, очень велико. Если же об этом помнить — можно элементарно изобразить эквивалентную схему, заменив вольтметры, через которые не может протекать ток, на разрывы цепи (см. рис. 4.2.2). После этого легко видеть, что соединение на самом деле является последовательным.

Тогда эффективное сопротивление R всей цепи равно сумме сопротивлений отдельных резисторов:

$$R = R_1 + R_2 + R_3 + R_4,$$

сила тока в цепи определяется по закону Ома:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{U}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4},$$

а напряжение на каждом резисторе, следуя тому же закону, равно произведению его сопротивления на эту силу тока:

$$U_i = IR_i = \frac{UR_i}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4},$$

где индекс i принимает значения от 1 до 4 и означает номер резистора.

Наконец, каждый из вольтметров показывает сумму напряжений на двух резисторах, находящихся между его клеммами. Пронумеровав вольтметры $1, 2, 3$ сверху вниз и обозначив их показания $V_{1,2,3}$ соответственно, получим

$$V_1 = U_1 + U_2 = U\frac{R_1 + R_2}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = 9\,\text{В}$$

и аналогично

$$V_2 = U\frac{R_2 + R_3}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = 5\,\text{В}; \qquad V_3 = U\frac{R_3 + R_4}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = 3\,\text{В}.$$

Ответ: показания вольтметров сверху вниз $V_1 = 9\,\text{В}$, $V_2 = 5\,\text{В}$, $V_3 = 3\,\text{В}$.

Критерии оценивания

Верно записан закон Ома для любого участка цепи	2 балла
Продемонстрировано понимание того, что идеальный вольтметр имеет бесконечное сопротивление	3 балла
Изображена эквивалентная цепь или словами описано, что соединение можно считать последовательным	3 балла
Найдена сила тока в цепи или записана верная пропорция между напряжениями на последовательно соединенных элементах	3 балла
Получен правильный ответ	5 баллов
Всего	**16 баллов**

Задача 4.2.2.2. Рубиновый лазер (20 баллов)

Условие

Центральным компонентом твердотельных лазеров является кристалл, в котором создается так называемая инверсная населенность — особое состояние вещества, делающее возможной генерацию когерентного (лазерного) излучения. Для этого веществу необходимо передать большое количество энергии, что достигается обычно за счет освещения кристалла мощной, но не когерентной (естественного света) лампой. Этот процесс называют накачкой лазера. К сожалению, эффективность преобразования энергии в этом процессе не бывает велика, и большая часть изначально переданной кристаллу световой энергии переходит в тепло, а не в энергию последующего лазерного импульса. Чтобы отводить это тепло и тем самым минимизировать тепловые деформации тонко настроенной оптики, кристалл помещают в воду, непрерывно омывающую его и лампу накачки.

Рубиновый лазер генерирует импульсы излучения, обладающие энергией $W = 3$ Дж каждый и следующие друг за другом с частотой $\nu = 0{,}8$ Гц. Для охлаждения лазера через него приходится прокачивать воду с объемным расходом $v = 11$ л/мин, при этом температура воды на выходе из лазера оказывается на $\Delta t = 3\,^\circ$C выше, чем на входе. Определите КПД преобразования энергии лампы накачки в энергию лазерного излучения. Удельная теплоемкость воды $c = 4\,200$ Дж/(кг·°C), ее плотность $\rho = 1\,000$ кг/м^3.

Решение

Из описания принципов работы лазера можем заключить, что изначальная мощность P_0, используемая для накачки лазера, переходит в процессе его работы в мощность $P_л$ лазерных импульсов и тепловую мощность $P_т$, отводимую системой охлаждения. Очевидно, полезным является первый из этих видов мощности, так что коэффициент полезного действия задается формулой

$$\eta = \frac{P_л}{P_0} = \frac{P}{P_л + P_т}.$$

Чтобы определить среднюю полезную мощность лазерного излучения, достаточно умножить энергию одного импульса на частоту их следования:

$$P_л = \nu W.$$

Для нахождения тепловой мощности найдем количество теплоты Q, уносимое водой за время τ. Оно, как хорошо известно из термодинамики, задается выражением

$$Q = cm\Delta t,$$

где m — масса воды, протекающей за это время через систему охлаждения. Зная объемный расход жидкости, найти ее также можно тривиально:

$$m = \rho v\tau \Rightarrow Q = c\rho v\tau\Delta t.$$

Тепловая мощность есть отношение этой теплоты ко времени:

$$P_т = \frac{Q}{\tau} = c\rho v\Delta t.$$

Остается окончательно подставить мощности в определение КПД и получить ответ (не забывая перевести литры в кубические метры и минуты в секунды):

$$\eta = \frac{P}{P_л + P_т} = \frac{\nu W}{\nu W + c\rho v\Delta t} \approx 0{,}1\%.$$

К сожалению, эффективность преобразования световой энергии в большинстве твердотельных лазеров действительно имеет настолько малый порядок. Тем не менее качественные отличия когерентного света лазера от естественного света лампы делают и устройства со столь низким КПД весьма полезными.

Ответ:

$$\eta\frac{\nu W}{\nu W + c\rho v\Delta t} \approx 0{,}1\%.$$

Критерии оценивания

Верно определено, какие мощности или энергии следует отнести друг другу для нахождения КПД лазера	4 балла
Найдена средняя полезная мощность или частота верно использована для определения промежутка времени между двумя импульсами	3 балла
Верно записана связь теплоты с массой и удельной теплоемкостью	3 балла
Верно найдена тепловая мощность или теплота, отводимая от лазера за время между двумя последовательными импульсами	4 балла
Получен правильный ответ	6 баллов
Всего	**20 баллов**

Задача 4.2.2.3. Клин (20 баллов)

Условие

Для оптического эксперимента из легкого стекла с показателем преломления n изготовлена треугольная призма в виде тонкого клина с очень острым углом между ребрами. На одно из ребер клина нормально падает из воздуха луч света и, пройдя сквозь призму, отклоняется на угол $\phi_1 = 5°$ от своего изначального направления распространения. Затем клин полностью погружают в плотную оптическую смолу с показателем преломления $n_0 = 1{,}75$, в результате чего луч света, также нормально падающий на одно из ребер клина, начинает отклоняться на угол $\phi_2 = 2°$, но в обратную сторону. Найдите n. Указание: для малых углов справедливо приближенное равенство $\sin\alpha \approx \alpha$ (в радианах).

Решение

Изобразим ход лучей при падении их на клин из воздуха. На рис. 4.2.3 сплошными линиями изображен ход лучей, пунктиром построена нормаль ко второй границе раздела сред.

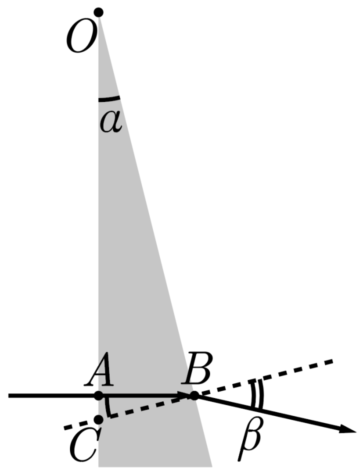


Рис. 4.2.3

Поскольку падение луча на первую границу нормальное, ни при каких показателях преломления луч на этой границе не отклоняется. Тогда треугольники $\triangle OBC$ и $\triangle OAB$ являются прямоугольными и имеют общий угол при вершине O. Следствием этого подобия становится равенство

$$\angle OCB = \angle OBA = 90° - \alpha,$$

где α — угол при вершине клина. Но так как угол падения $\angle ABC$ луча на вторую границу раздела равен $90° - \angle ABO$, то он также равен α.

Тогда из закона Снеллиуса легко выразим угол преломления β:

$$\sin\beta = n\sin\alpha \Rightarrow \beta \approx n\alpha.$$

Применимость приближения малых углов обоснована тем, что по условиям клин является тонким, то есть имеет малый угол раствора, а также малыми (по сравнению с 1 рад) значениями углов $\phi_{1,2}$.

Теперь остается заметить, что угол ϕ_1, на который луч отклонился от своего изначального направления распространения, равен

$$\phi_1 = \beta - \alpha \approx \alpha(n-1).$$

При проведении аналогичных рассуждений во втором случае (клин в оптически плотной смоле) следует сделать два изменения. Во-первых, роль показателя преломления n в законе Снеллиуса будет выполнять относительный показатель преломления двух сред n/n_0. Во-вторых, поскольку отклонение луча по условиям происходит в другую сторону, ϕ_2 имеет противоположный знак:

$$\phi_2 = \alpha - \beta_2 \approx \alpha\left(1 - \frac{n}{n_0}\right).$$

Решая полученную систему из двух уравнений, найдем ответ на вопрос задачи:

$$n = n_0\frac{\phi_1+\phi_2}{\phi_2 n_0 + \phi_1} \approx 1{,}44.$$

Ответ:

$$n = n_0\frac{\phi_1+\phi_2}{\phi_2 n_0 + \phi_1} \approx 1{,}44.$$

Критерии оценивания

Верно изображен или детально описан ход лучей	5 баллов
Верно записан закон Снеллиуса для одного случая	3 балла
Верно записан закон Снеллиуса для второго случая	2 балла
Верно найдено соотношение между углами падения, преломления и отклонения луча для одного случая	3 балла
То же для второго случая	2 балла
Получен правильный ответ	5 баллов
Всего	**20 баллов**

Задача 4.2.2.4. Пролет (20 баллов)

Условие

В квантовой физике почти никогда не говорят о скоростях частиц, вместо этого используя термины импульса и энергии. Еще не привыкший к этому лаборант нашел запись в лабораторном журнале, согласно которой некоторая частица, обладавшая изначальным импульсом p_0, за время t пролетела через область сильного электромагнитного поля, в которой на нее действовала постоянная сила, равная $0{,}6p_0/t$. В следующей записи было указано, что начальная кинетическая энергия этой частицы равнялась K_0, а после пролета через поле окна оказалась равна $K_1 = 0{,}64K_0$. Сначала эти же записи показались лаборанту взаимно исключающими, но чуть позже он понял их и даже вычислил, на какой угол отклонилась частица от начального направления своего движения. Найдите и вы этот угол.

Решение

Обозначим массу частицы m, а ее начальную и конечную скорости v_0 и v_1 соответственно. Из известного изменения кинетической энергии легко вычислить отношение между этими скоростями. Будет удобнее записать его в виде простой дроби:

$$K = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2K}{m}} \Rightarrow \frac{v_1}{v_0} = \sqrt{\frac{K_1}{K_0}} = \sqrt{0{,}64} = \frac{4}{5}.$$

В то же время приращение Δv скорости легко вычислить, зная величину действовавшей на частицу силы F:

$$\Delta v = at = \frac{Ft}{m} = \frac{0{,}6p_0\cancel{t}}{m\cancel{t}} = \frac{3}{5}v_0,$$

где a обозначено ускорение частицы. То же можно доказать при помощи понятия импульса силы.

Изменение скорости на величину $3/5v_0$ и конечное значение этой скорости, равное $4/5$ от начального, можно принять за противоречие, но оно легко снимется, если учесть, что сила направлена к начальной и конечной скоростям под некоторыми углами. Эти углы можно напрямую вычислить из теоремы косинусов, но гораздо проще узнать в числах $3, 4, 5$ египетский треугольник:

$$v_1^2 + \Delta v^2 = \left(\frac{4}{5}v_0\right)^2 + \left(\frac{3}{5}v_0\right)^2 = v_0^2.$$

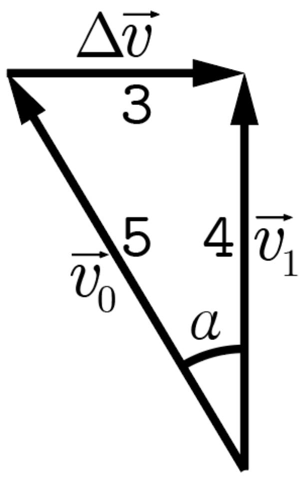


Рис. 4.2.4

Тогда становится очевидно, что конечная скорость $\vec{v}_1$ и приращение скорости $\Delta\vec{v}$ перпендикулярны друг другу (см. рис. 4.2.4). На рисунке модули векторов указаны в единицах $v_0/5$, а отмеченный угол α является искомым в задаче. Найдем его, используя тригонометрию:

$$\alpha = \arccos\frac{4}{5} = \arcsin\frac{3}{5} \approx 36{,}8°.$$

Ответ:

$$\alpha = \arccos\frac{4}{5} = \arcsin\frac{3}{5} \approx 36{,}8°.$$

Критерии оценивания

Верно найдено отношение модуля конечного значения скорости или импульса к начальному	4 балла
Верно найдено отношение приращения скорости или импульса к начальному или конечному	4 балла
Верно изображена или описана процедура векторного сложения скоростей или импульсов	3 балла
Определено, что треугольник, образованный скоростями или импульсами и их приращениями, прямоугольный, или правильно записана теорема косинусов	3 балла
Получен правильный ответ	6 баллов
Всего	**20 баллов**

Задача 4.2.2.5. Кольцевые маски (24 балла)

Условие

Интенсивностью I излучения называется отношение мощности этого излучения, попадающей на некоторую площадку, к площади этой площадки. Интенсивность световых пучков, как правило, максимальна вблизи их оси и уменьшается к краям.

В эксперименте получен лазерный пучок радиусом $r_0 = 10$ см, имеющий параболический профиль зависимости интенсивности от расстояния r до оси пучка (см. рис. 4.2.5, верхнее изображение) и не зависящий от других координат. Этот пучок падает нормально на непрозрачный экран, в котором вытравлены различные кольцевые маски — участки с радиусом R и толщиной $d \ll R$, прозрачные для излучения лазера (см. рис. 4.2.5, нижнее изображение). В результате эксперимента было установлено, что сквозь кольцо радиусом $R_1 = 6$ см проходит излучение с общей мощностью $P_1 = 4$ мВт. Найдите мощность излучения, проходящего через кольцо радиусом $R_2 = 8$ см. Центр маски совпадает с центром пучка, а дифракционными явлениями можно пренебречь.

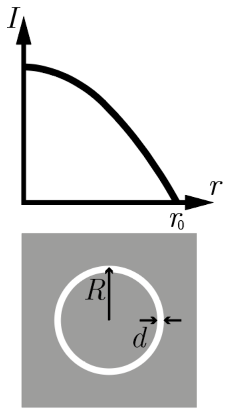


Рис. 4.2.5

Решение

Прежде всего по данным задачи построим явно функцию зависимости $I(r)$. Согласно условиям, этот график представляет собой параболу, поэтому зависимость следует искать в форме

$$I(r) = ar^2 + br + c.$$

По графику хорошо видно, что парабола направлена ветвями вниз, значит, $a < 0$, ее вершина, расположенная всегда в точке $-b/(2a)$, находится в нуле, значит, $b = 0$, а в точке $r = r_0$ парабола пересекает ось абсцисс:

$$I(r_0) = ar_0^2 + c = 0 \Rightarrow c = -ar_0^2.$$

Введем более физически обоснованные обозначения, переобозначив величину $-a$ как I_0 (интенсивность на оси пучка). Получим

$$I(r) = I_0 \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right).$$

Поскольку по условиям толщина кольца мала в сравнении с его радиусом, а от полярного угла интенсивность пучка не зависит, в пределах всей кольцевой маски интенсивность можно считать постоянной и равной $I(R)$.

Мощность P прошедшего через маску излучения по определению интенсивности необходимо искать как произведение этой интенсивности на площадь S маски. Последнюю, опять опираясь на приближение $d \ll R$, легко найти как произведение толщины кольца на его длину окружности:

$$S(R) \approx 2\pi Rd.$$

Тогда

$$P \approx I(R)S(R) \approx 2\pi RdI_0\left(1 - \frac{R^2}{r_0^2}\right).$$

Подставляя в это выражение два радиуса из условий, получим

$$\frac{P_2}{P_1} \approx \frac{\cancel{2\pi dI_0 r_0^2}R_2(r_0^2 - R_2^2)}{\cancel{2\pi dI_0 r_0^2}R_1(r_0^2 - R_1^2)} \Rightarrow P_2 \approx \frac{R_2(r_0^2 - R_2^2)}{R_1(r_0^2 - R_1^2)}P_1 = 3\,\text{мВт}.$$

Ответ:

$$P_2 \approx \frac{R_2(r_0^2 - R_2^2)}{R_1(r_0^2 - R_1^2)}P_1 = 3\,\text{мВт}.$$

Критерии оценивания

Верно составлено уравнение, описывающее зависимость $I(r)$	6 баллов
Продемонстрировано понимание того, что мощность пучка равна произведению интенсивности на радиусе кольца на площадь этого кольца	4 балла
Получено явное выражение для площади кольца: точное или в приближении $d \ll R$	4 балла
Получено явное выражение для мощности прошедшего через маску пучка в зависимости от радиуса маски	4 балла
Получен правильный ответ	6 баллов
Всего	**24 балла**

4.2.3. Физика. 10–11 классы

Задача 4.2.3.1. Электропривод (13 баллов)

Условие

Для изучения самых крохотных частиц порой приходится использовать самые громадные установки. Инновационный рентгеновский лазер представляет собой трубу длиной $L = 70\,\text{м}$ и массой $M = 800\,\text{т}$, достаточно равномерно распределенной по длине трубы, которую требуется иметь возможность наклонять в вертикальной плоскости. К сожалению, из-за необходимости размещения на этой трубе большого количества сложного оборудования, подвижный шарнир пришлось закрепить на расстоянии $x = 4$ м от центра тяжести лазера на его оси. Двигатель, управляющий наклоном всей установки, питается от постоянного напряжения $U = 600$ В и имеет КПД $\eta = 45\%$. Найдите величину заряда, который должен протечь через двигатель, чтобы повернуть лазер на $\alpha = 5^\circ$ в сторону подъема центра тяжести из изначально горизонтального положения. Ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2.

Решение

При повороте лазера на угол α вокруг шарнира, расположенного на расстоянии x от его центра тяжести, последний смещается по вертикали на расстояние $h = x\sin\alpha$. Полная длина лазера при этом не играет роли. Полезная механическая работа двигателя $A_{\text{мех}}$ равна приращению потенциальной энергии лазера:

$$A_{\text{мех}} = Mgh = Mgx\sin\alpha.$$

Потребленная электроэнергия, сопутствующая этому повороту, окажется больше в $1/\eta$ раз и будет равна, согласно определению напряжения, произведению искомого заряда q на напряжение между контактами двигателя:

$$qU = \frac{A_{\text{мех}}}{\eta} = \frac{Mgx\sin\alpha}{\eta}.$$

Отсюда окончательно запишем ответ

$$q = \frac{Mgx\sin\alpha}{\eta U} \approx 10{,}1\,\text{кКл}.$$

Ответ:

$$q = \frac{Mgx\sin\alpha}{\eta U} \approx 10{,}1\,\text{кКл}.$$

Критерии оценивания

Верно найдена высота подъема центра тяжести лазера	3 балла
Верно записана связь механической работы с высотой подъема и массой лазера	2 балла
Верно записана связь электрической работы с зарядом и напряжением	3 балла
Верно записана связь двух работ с КПД	2 балла
Получен правильный ответ	3 балла
Всего	**13 баллов**

Задача 4.2.3.2. Модель (17 баллов)

Условие

При расчете излучения колеблющейся молекулы используется ее компьютерная модель, состоящая из двух материальных точек с равными массами m и разноименными зарядами равной величины $\pm q$, находящимися на некотором расстоянии l друг от друга. Материальные точки связаны химической связью, которая в рамках модели ведет себя как идеальная пружина, и совершают, благодаря ей, синхронные гармонические колебания вокруг своих равновесных положений с амплитудой $l/6$ (каждая частица) так, что центр масс системы остается на месте. Другого взаимодействия между частицами в рамках этой модели нет. Определите, во сколько раз будут отличаться минимальная и максимальная напряженность электрического поля, создаваемого такой системой в точке, находящейся на одной прямой с частицами на расстоянии $2l$ от ее центра масс. Дайте ответ с точностью до двух значащих цифр.

Решение

В описанной модели напряженность электрического поля E в точке наблюдения находится по принципу суперпозиции как сумма напряженностей, созданных в этой точке каждой из частиц по отдельности. В силу симметрии задачи модуль напряженности не зависит от того, с какой стороны от системы рассматривается точка наблюдения, поэтому будем для определенности считать, что она ближе к положительному заряду. В таком случае напряженность в этой точке равна

$$E = kq\left(\frac{1}{x_+^2} - \frac{1}{x_-^2}\right),$$

где $x_\pm$ — расстояния до точки наблюдения от положительной и отрицательной частиц соответственно, k — коэффициент пропорциональности в законе Кулона.

Поскольку по условиям центр масс системы остается на месте, а частицы имеют одинаковые массы, в каждый момент колебаний одна частица приближается к точке наблюдения настолько же, насколько вторая отдаляется. Следовательно, напряженность электрического поля будет максимальна при максимальном растяжении связи, когда положительная частица ближе всего к точке наблюдения, а противодействующая ей отрицательная — дальше всего, и минимальна при ее максимальном сжатии.

В равновесии положительный заряд находится от точки наблюдения на расстоянии

$$x_+ = 2l - \frac{1}{2}l = \frac{3}{2}l,$$

а отрицательный — на расстоянии

$$x_- = 2l + \frac{1}{2}l = \frac{5}{2}l.$$

Вычислим теперь минимальные и максимальные расстояния от частиц до точки наблюдения:

$$x_{+max} = \frac{3}{2}l + \frac{l}{6} = \frac{5}{3}l; \qquad x_{+min} = \frac{3}{2}l - \frac{l}{6} = \frac{4}{3}l;$$
$$x_{-max} = \frac{5}{2}l + \frac{l}{6} = \frac{8}{3}l; \qquad x_{-min} = \frac{5}{2}l - \frac{l}{6} = \frac{7}{3}l.$$

Остается подставить эти расстояния в приведенное выражение для напряженности:

$$E_{max} = kq\left(\frac{9}{16l^2} - \frac{9}{64l^2}\right) = \frac{27}{64}\frac{k}{l^2} \approx 0{,}422\frac{kq}{l^2},$$

$$E_{min} = kq\left(\frac{9}{25l^2} - \frac{9}{49l^2}\right) = \frac{216}{1225}\frac{kq}{l^2} \approx 0{,}176\frac{kq}{l^2}.$$

Отсюда окончательно

$$\frac{E_{max}}{E_{min}} = \frac{1225}{512} \approx 2{,}4.$$

Ответ:

$$\frac{E_{max}}{E_{min}} = \frac{1225}{512} \approx 2{,}4.$$

В условиях ограниченного времени можно прибегнуть к разумному промежуточному округлению и не давать ответа простой дробью.

Критерии оценивания

Записано верное выражение для напряженности электрического поля точечного заряда	3 балла
Верно применен принцип суперпозиции электрических полей	2 балла
Изображены на рисунке или описаны словами соображения, демонстрирующие понимание того, что удаления зарядов от центра системы одинаковы в каждый момент времени	3 балла
Верно найдены минимальные и максимальные расстояния от зарядов до точки наблюдения (4 расстояния)	4 балла
Получен правильный ответ	5 баллов
Всего	**17 баллов**

Задача 4.2.3.3. Сплав (20 баллов)

Условие

Металлический сплав изготовлен из радиоактивного изотопа X, имеющего период полураспада T, радиоизотопа Y, имеющего период полураспада $2T$ и нескольких стабильных металлов. Ядро каждого из радиоизотопов, претерпев β-распад, образует ядро стабильного металла. Когда образец из этого сплава был привезен в лабораторию, масса радиоизотопа X в нем была вдвое выше массы радиоизотопа Y, а общая масса стабильных металлов в образце совпадала с общей массой радиоизотопов. По прошествии месяца образец подвергли анализу и установили, что теперь уже масса радиоизотопа Y оказалась вдвое выше, чем масса радиоизотопа X. Во сколько раз теперь отличаются общие массы стабильных и радиоактивных изотопов в образце?

Решение

За время $2T$ распадается половина изотопа Y и три четверти изотопа X (как следует из определения периода полураспада). Следовательно, отношение этих двух изотопов изменяется в 2 раза (в сторону увеличения доли изотопа Y). За описанный в задаче месяц соотношение между этими изотопами изменилось в 4 раза, следовательно, прошло время $4T$ — два периода полураспада для Y и четыре для X.

Изначальную массу изотопа Y обозначим m_{0Y}. Из условий задачи следует, что начальная масса изотопа X была равна $m_{0X} = 2m_{0Y}$, а стабильных изотопов $m_{0S} = m_{0X} + m_{0Y} = 3m_{0Y}$. По прошествии указанного времени масса изотопа X становится равна $m_{1X} = m_{0X}/16 = m_{0Y}/8$, а масса изотопа Y — равна $m_{1Y} = m_{0Y}/4$.

Поскольку при β-распаде нейтроны превращаются в протоны (β^--распад) или наоборот (β^+-распад), масса ядер в этом процессе существенно не меняется, поэтому можно считать, что суммарная масса образца осталась прежней:

$$m_{0X} + m_{0Y} + m_{0S} = m_{1X} + m_{1Y} + m_{1S},$$

откуда легко найти конечную массу m_{1S} стабильных изотопов:

$$m_{1S} = m_{0X} + m_{0Y} + m_{0S} - m_{1X} - m_{1Y} = \left(2 + 1 + 3 - \frac{1}{8} - \frac{1}{4}\right) m_{0Y} = \frac{45}{8} m_{0Y}.$$

Таким образом,

$$\frac{m_{1R}}{m_{1S}} = \frac{m_{1X} + m_{1Y}}{m_{1S}} = \frac{3/8}{45/8} = \frac{1}{15},$$

где m_{1R} обозначена конечная масса радиоактивных изотопов.

Ответ: масса стабильных изотопов в 15 раз выше массы радиоактивных.

Критерии оценивания

Хотя бы один раз верно записан формулой или описан словами закон радиоактивного распада или явно продемонстрировано его понимание	3 балла
Вычислено, что прошедший месяц составляет $4T$	4 балла
Верно найдено, во сколько раз за этот месяц изменились массы радиоизотопов	3 балла
Указано, что после $\beta-$ распада масса ядер-продуктов практически не отличается от массы ядер-реагентов	3 балла
Получен правильный ответ	7 баллов
Всего	**20 баллов**

Задача 4.2.3.4. Световое давление (26 баллов)

Условие

Как известно, свет оказывает крошечные силы давления на поверхности, на которых он поглощается, преломляется или отражается, причем сила этого давления зависит от того, что именно происходит со световым пучком. На треугольную призму, основание которой представляет собой правильный треугольник, падает лазерный луч так, что его угол падения на первую грань и его угол преломления на второй грани одинаковы и равны $\alpha = 60°$ (см. рис. 4.2.6). Определите, во сколько раз изменится модуль силы светового давления на призму, если поверхность, на которую падает луч, посеребрить так, что она станет отражать $R = 50\%$ падающей световой энергии? Считайте, что на непосеребренных поверхностях происходит только преломление, а поглощение во всех случаях весьма мало.

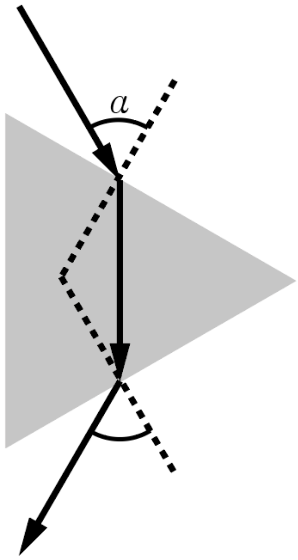


Рис. 4.2.6

Решение

Изобразим падающий, преломленный и отраженный лучи и введем обозначения для удобства дальнейших рассуждений, как это показано на рис. 4.2.7. Сплошными линиями обозначен ход лучей, частым пунктиром — нормали к границам раздела, редким тонким пунктиром — продолжения лучей. Прежде всего следует заметить, что так как оба преломления происходят на границе одних и тех же сред, а угол первого падения $\angle JAM$ равен углу второго преломления $\angle LCN$ по условиям задачи, то углы первого преломления $\angle BAC$ и второго падения $\angle BCA$ также равны.

Из суммы углов в четырехугольнике $ADCB$ легко найти угол $\angle ABC = 120°$, а тогда, в силу доказанного выше равенства, и суммы углов в треугольнике $\triangle ABC$, $\angle LCN = \angle JAM = 30°$. Тогда углы $\angle PAM$ и $\angle QCN$ также равны $30°$ как вертикальные, а следовательно, $60° - 30° = 30°$ равны и углы $\angle JAP = \angle LCQ$, которые падающий и преломленный луч составляют с прямой PQ.

Последнее равенство позволяет утверждать, что дважды преломленный луч CL и падающий луч JA составляют друг с другом угол $120°$. Существует и множество других способов доказать этот ключевой для дальнейшего решения результат. Отраженный луч AK также составляет угол $2\alpha = 120°$ с падающим: этот результат прямо следует из закона отражения. А значит, с дважды преломленным лучом CL он составляет такой же угол.

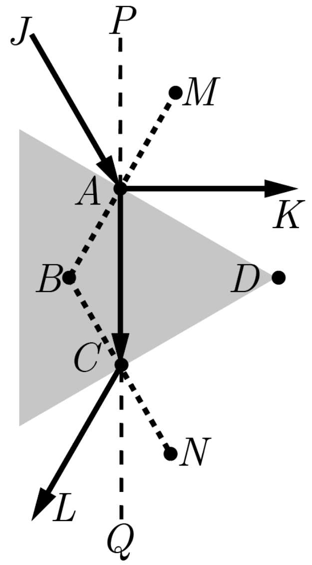


Рис. 4.2.7

Теперь рассмотрим изменение импульса фотонов в результате преломлений и отражений на найденные углы. Обозначим $\vec{j}$ единичный вектор, сонаправленный с направлением распространения падающего луча JA, $\vec{k}$ — единичный вектор, сонаправленный с направлением распространения отраженного луча AK и $\vec{l}$ — единичный вектор, сонаправленный с направлением распространения дважды преломленного луча CL. Также обозначим p_0 модуль импульса одного фотона, падающего на призму, а n — число фотонов, падающих на нее в единицу времени.

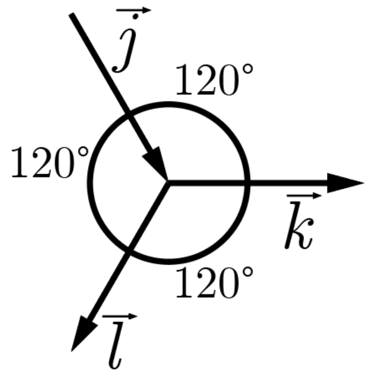


Рис. 4.2.8

В этих обозначениях очень легко записать силы $\vec{F}$ светового давления, всегда равные скорости изменения импульса света (с обратным знаком):

$$\vec{F} = -\frac{\Delta \vec{p}_{\text{св}}}{\Delta t} = -n\Delta\vec{p}.$$

В случае чистого преломления начальный импульс всех фотонов равен $\vec{p}_0 = p_0\vec{j}$, а конечный — равен $\vec{p}_1 = p_0\vec{l}$. Сила светового давления в этом случае задается

выражением
$$\vec{F}_1 = np_0(\vec{j} - \vec{l}) = np_0\vec{k}.$$
Последнее равенство цепочки обусловлено правилом треугольника для сложения векторов.

В случае частичного отражения половина (R) всех фотонов имеет тот же конечный импульс $\vec{p}_1$, и половина — конечный импульс $\vec{p}_2 = p_0\vec{k}$. Сила светового давления тогда задается выражением
$$\vec{F}_2 = p_0\left(n\vec{j} - (1-R)\vec{l} - R\vec{k}\right) = np_0\left(\vec{j} - \frac{\vec{j}}{2}\right) = \frac{np_0}{2}\vec{j}.$$
Учитывая, что векторы $\vec{j}, \vec{k}, \vec{l}$ единичные, для ответа на вопрос о модулях сил их можно отбросить из окончательных выражений и получить
$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: сила светового давления уменьшится в 2 раза.

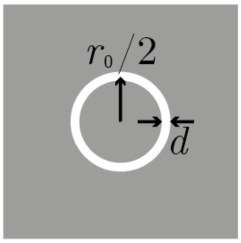
Критерии оценивания

Верно найдены углы между падающим, преломленным и отраженным лучами	5 баллов
Предыдущий пункт подкреплен хорошими геометрическими рассуждениями	5 баллов
Продемонстрировано понимание того, что сила светового давления пропорциональна изменению импульса фотона	3 балла
Продемонстрировано понимание того, что это изменение необходимо искать с помощью векторной разности; записаны или изображены процедуры вычитания верных векторов	5 баллов
Получен правильный ответ	8 баллов
Всего	**26 баллов**

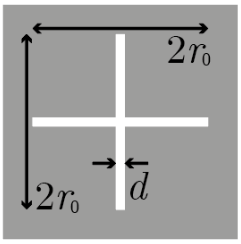
Задача 4.2.3.5. Маски (24 балла)

Условие

В эксперименте был получен лазерный пучок, интенсивность (плотность потока мощности) I которого зависит от расстояния r до оси пучка по закону
$$\begin{cases} I(r) = I_0(r_0 - r)/r_0 & \text{при } r < r_0, \\ I(r) = 0 & \text{при } r \geqslant r_0, \end{cases}$$
где I_0, r_0 — известные постоянные. От других координат интенсивность пучка не зависит.



Маска 1



Маска 2

Рис. 4.2.9

Лазерный пучок с этим профилем интенсивности падает нормально на непрозрачный экран, на котором вытравлены маски (участки, пропускающие излучение лазера) различной формы. Определите, во сколько раз отличаются мощности излучения, проходящего через две маски, изображенные на рис. 4.2.9, если их толщины $d \ll r_0$, а дифракционными явлениями можно пренебречь.

Решение

Поскольку по условиям толщина масок существенно меньше радиуса пучка, для первой маски, имеющей вид кольца радиуса $r_0/2$, можно считать, что интенсивность всего прошедшего через нее излучения одинакова и равна

$$I_1 = I(r_0/2) = \frac{I_0}{2}.$$

Тогда, чтобы найти общую прошедшую через нее мощность P_1, достаточно умножить эту величину на площадь маски S_1. Последняя опять-таки, в силу пренебрежимо малой толщины, может быть найдена как произведение длины маски на ее толщину:

$$S_1 = \pi r_0 d \Rightarrow P_1 = \frac{\pi}{2} I_0 r_0 d.$$

Сложнее дело обстоит с крестообразной маской. Ее удобно представить как сумму четырех одинаковых отрезков, исходящих из центра пучка: область пересечения этих отрезков имеет пренебрежимо малую площадь $\sim d^2$. В пределах каждого из этих лучей интенсивность снижается от оси пучка к краю линейно, поэтому общую мощность P_{20}, прошедшую через каждый из лучей, необходимо искать как площадь под графиком $I(r)$, дополнительно умноженную на ширину луча d, как это изображено на рис. 4.2.10.

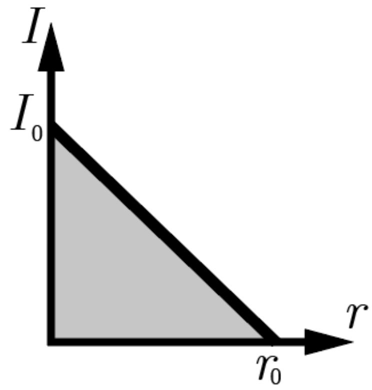


Рис. 4.2.10

Таким образом, мощность P_{20} равна

$$P_{20} = \frac{I_0 r_0}{2} d,$$

а мощность P_2, прошедшая через всю маску, соответственно, в 4 раза больше:

$$P_2 = 4P_{20} = 2I_0 r_0 d.$$

Тогда окончательно

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{4}{\pi}.$$

Другой допустимый способ рассуждения состоит в том, что на обеих этих масках средняя интенсивность излучения оказывается одинаковой, поэтому отношение полных мощностей фактически равно отношению площадей масок. Это решение тоже будет считаться верным, если его ключевое соображение убедительно обосновано.

Ответ: мощность излучения, прошедшего через вторую маску, больше в $4/\pi \approx \approx 1{,}27$ раза.

Критерии оценивания

Продемонстрировано понимание того, что интенсивность в пределах первой маски можно считать постоянной, а в пределах второй — нельзя	5 баллов
Верно найдена интенсивность на уровне первой маски	3 балла
Верно найдена (точно или в приближении $d \ll r_0$) площадь первой маски	3 балла
Продемонстрировано понимание того, что на второй маске мощность можно вычислить через площадь под графиком, определенный интеграл или среднее значение	6 баллов
Получен правильный ответ	7 баллов
Всего	**24 балла**

4.3. Инженерный тур

4.3.1. Общая информация

Команда получает техническое задание на разработку прототипа квантового генератора случайных чисел — одного из ключевых элементов систем защиты и передачи данных, численного моделирования комплексных процессов.

Участникам предстоит разработать, собрать и протестировать квантово-оптическое устройство, способное генерировать случайную числовую последовательность с максимально возможной длиной числовой последовательности и скорости ее генерации.

4.3.2. Легенда задачи

Команда получает заказ на создание полезной модели квантового-оптического устройства, способного генерировать длинные случайные числовые последовательности. В качестве заказчика может выступать, например, компания, которая обеспечивает услугу безопасной связи в сети интернет, которой нужны эти последовательности для создания ключей шифрования высокой стойкости.

Участникам необходимо применить знания по основам квантовой физики, оптике и статистике для того, чтобы:

- создать подобное устройство,
- доказать, что их числовые последовательности действительно случайны (пройти соответствующие тесты),
- рассчитать характеристики разработанного устройства по длине и скорости генерации числовой последовательности.

Предполагается, что устройство будет работать и встраиваться в сетевую архитектуру, поэтому применение криогеники и сильно излучающих материалов не допускается.

Таким образом, для достижения поставленных целей участникам понадобятся оптоволоконные компоненты, детекторы лазерного излучения, осциллографы и ПК с удобной средой разработки программ.

4.3.3. Требования к команде и компетенциям участников

Количество участников в команде: 3–4 человека.

Компетенции, которыми должны обладать члены команды:

- **Инженер-оптик:** разрабатывает и реализует схему будущего устройства, отвечающую заявленным техническим требованиям; разрабатывает и проводит калибровочные измерения.
- **Физик-теоретик:** проводит все предварительные расчеты схемы будущего устройства; совместно с инженером-оптиком разрабатывает систему оценки технических характеристик устройства, систему оценки погрешностей при проведении калибровочного измерения.
- **Программист:** создает программный код для обработки данных, получаемых с устройства, использует его для обработки данных калибровочного измерения.
- **Менеджер научных проектов:** создает сопроводительную документацию к устройству — описывает его принцип работы, полностью и исчерпывающе перечисляет технические характеристики, комментирует особенности обращения конечного пользователя с устройством и программным кодом, описывает проведение и результаты калибровочного измерения; готовит продуктовую концепцию конечного устройства, курирует финальную презентацию продукта комиссии (заказчику).

Необходимо отметить, что распределение ролей может не быть жестко фиксированным. Так, например, менеджер научных проектов вполне способен помогать в поиске информации и обработке результатов.

4.3.4. Оборудование и программное обеспечение

Таблица 4.3.1

Наименование	**Описание**
Оптическая установочная плита	Массивная алюминиевая плита для установки и монтажа оптических и оптоэлектронных компонентов с помощью стандартизированных разъемных соединений
Двухканальный фотоприемник	Двухканальный полупроводниковый детектор для регистрации электромагнитного излучения видимого диапазона
Волоконный разветвитель 1×2	Оптоволоконный элемент для разделения интенсивности излучения в заданном отношении между выходными портами
Розетки FC-UPC	Приспособления для разъемного соединения оптоволоконных элементов
Держатели для розеток	Приспособление для монтажа розеток на оптической установочной плите
Держатели для разветвителей	Приспособление для эргономичного и безопасного монтажа оптоволоконных элементов на оптической установочной плите

Таблица 4.3.1

Наименование	**Описание**
Крепежные болты	Болты с полной резьбой M6 под внутренний шестигранник различной длины из нержавеющей стали для монтажа элементов на оптической установочной плите
USB-камера	Оптоэлектронный матричный детектор излучения видимого диапазона
Патчкорд SM FC-UPC	Коммутационный оптоволоконный одномодовый кабель для соединения элементов по стандарту соединительных приспособлений FC-UPC
Патчкорд MM FC-UPC	Коммутационный оптоволоконный многомодовый кабель для соединения элементов по стандарту соединительных приспособлений FC-UPC
Отвертка	Ручной слесарный монтажный инструмент, предназначенный для завинчивания и отвинчивания крепежных изделий с резьбой
Источник лазерного излучения	Источник когерентного оптического излучения видимого диапазона
Осциллограф	Прибор, предназначенный для исследования амплитудных и временны́х параметров электрического сигнала от фотодетектора, подаваемого на его вход, и наглядно отображаемого непосредственно на экране

4.3.5. Описание задачи

Решение поставленной задачи состоит из четырех модулей:

- модуль A «Разработка схемы устройства»;
- модуль B «Сборка оптической схемы»;
- модуль C «Обработка данных»;
- модуль D «Подготовка отчета и защита решения».

В качестве результатов выполнения инженерной задачи команды должны представить экспертам:

1. Чертеж оптической схемы устройства.
2. Собранную и отъюстированную (настроенную) оптическую систему устройства с использованием предоставленного организаторами оборудования.
3. Программный код для обработки данных с осциллографа, результат работы программного кода для двух наборов данных, эталонного и экспериментального, файл с функциональной схемой программного кода.
4. Текстовый отчет с подробным описанием принципов работы готового квантово-оптического устройства, принципов работы программного кода, результатами обработки экспериментальных данных, погрешностей результатов, описанием программных тестов на работоспособность и результатов их прохождения, пошаговой инструкцией для конечного пользователя.

5. Устное представление готового квантово-оптического устройства на 5 мин, сопровождаемое презентацией.

Модуль A. Разработка схемы устройства

На данном этапе команды должны создать чертеж оптической схемы будущего устройства, опираясь на перечень оборудования, предоставляемого каждой команде. Чертеж должен удовлетворять требованиям технического задания.

Артефакты модуля: чертеж на бумаге.

Модуль B. Сборка оптической схемы

В модуле B командам необходимо, опираясь на разработанный в модуле A чертеж, произвести непосредственную сборку квантово-оптического устройства с использованием предоставленного оборудования. Сборка должна осуществляться при строгом соблюдении правил техники безопасности. Готовая система фотографируется экспертами.

По окончании выполнения заданий этого модуля эксперты в присутствии представителя команды выполняют подключение измерительной техники (осциллографа) к собранному устройству, настраивают осциллограф и получают экспериментальные данные в электронном виде. Полученные данные сохраняются экспертами и передаются на флеш-накопителе команде для дальнейшей обработки.

Артефакты модуля:

- прототип устройства на лабораторном стенде;
- три фотографии установки, выполненные экспертами с разных ракурсов;
- осциллограмма, снятая экспертами.

Модуль C. Сборка оптической схемы

Теперь командам необходимо разработать алгоритм, принимающий решение о работоспособности готового устройства на основе совокупности данных о прохождении не менее трех различных тестов и создать программный код, который реализует этот алгоритм. Программа получает на вход данные эксперимента и выводит для каждого из тестов:

- название теста;
- название параметра, определяемого тестом;
- числовое значение параметра, определяемого тестом;
- общий вердикт алгоритма — результат прохождения совокупности тестов.

Программный код необходимо дополнить функциональной схемой, которая оформляется отдельным файлом в формате `pdf`.

Предполагается, что программный код одинаково качественно обработает два набора данных:

1. эталонный набор, который предоставляется экспертами каждой команде в начале работы над модулем C;

2. набор экспериментальных данных, которые команда получает от экспертов в результате выполнения модуля B.

В качестве языка программирования рекомендуется использовать язык Python.

Артефакты модуля:

- файл с программным кодом в формате `.py` (или `.txt` для языков программирования кроме Python),
- файл с функциональной схемой в формате `.pdf`,
- два файла с результатами работы программы на эталонном и экспериментальном наборах данных в формате `.txt`.

Модуль D. Подготовка отчета и защита решения

Здесь командам необходимо составить подробный отчет о проделанной работе в двух форматах: текстовый отчет и презентация готового продукта.

Текстовый отчет должен содержать:

1. Титульный лист с названием мероприятия, местом проведения, названием команды, списком участников и их распределением по ролям, датой составления отчета.
2. Подробное описание разработанного устройства с пояснением физических и математических принципов его работы (модули A, B).
3. Подробное описание принципов работы программного кода (модуль C).
4. Результаты, полученные при обработке эталонных и экспериментальных данных, суть разработанных программный тестов и результаты их прохождения (модуль C).
5. Пошаговую инструкцию по настройке готовой оптической схемы и использованию программного кода для потенциального конечного пользователя разработанного устройства.

Отчет может содержать схемы, рисунки, фотографии, таблицы и другой графический материал на усмотрение команды.

Презентация готового продукта должна состоять не более, чем из пяти слайдов, включая титульный, и содержать:

1. Актуальность решаемой задачи.
2. Принцип работы готового устройства.
3. Краткие технические характеристики готового устройства.
4. Смысл программных тестов на работоспособность устройства.
5. Указание преимуществ готового устройства перед потенциальными конкурентами.

Защита проектов состоит из двух частей:

1. устное выступление, сопровождаемое презентацией — 3–5 мин;
2. собеседования с командой в формате сессии вопросов-ответов — 3–5 мин.

Защита проектов оценивается комиссией из трех экспертов профиля и проводится в отдельном звукоизолированном помещении на площадке проведения профиля.

Команде может быть задано не более пяти вопросов. Эксперты могут адресовать вопросы конкретному участнику команды согласно его заявленной роли.

Артефакты модуля:

- текстовый отчет в формате `pdf`,
- презентация в формате `pdf`.

4.3.6. Система оценивания

По каждому критерию выставляется либо максимальный балл, если требование выполнено, либо 0 баллов, если требование не выполнено.

Таблица 4.3.2

Описание критерия	**Комментарии**	**Балл**
Модуль A. Разработка чертежа схемы устройства		
Схема разработана с учетом правил обращения с лазерным, оптическим и измерительным оборудованием и требований техники безопасности	Если не выполнено, баллы за модуль обнуляются; участникам выдается схема, подготовленная экспертами	2
На схеме обозначены все необходимые геометрические размеры, габаритные характеристики схемы с точностью до 3 см		2
На схеме обозначены все элементы устройства		2
Все элементы подписаны, чертеж снабжен легендой		2
Чертеж озаглавлен, заголовок отражает принцип работы устройства		2
На схеме отмечены источники случайности		2
На чертеже указано название команды		1
Общее качество выполнения чертежа	Чертеж удобен в использовании, выполнен качественно и аккуратно, легко читается, содержит всю необходимую информацию, не содержит избыточной информации, отсутствуют помарки и исправления	3
Максимальный балл за модуль A		**16**
Модуль B. Сборка оптической схемы		
Собранное устройство соответствует представленной ранее схеме	Схема, выполненная участниками или предоставленная экспертами	3
Излучение не возвращается обратно в источник		3
Отсутствуют паразитные/нежелательные/случайные выходы излучения за пределы схемы	Все неосновные лучи заглушены или заведены так, чтобы они не создавали опасность для окружающих людей	3
Источник случайности соответствует представленной ранее схеме	Схема, выполненная участниками или предоставленная экспертами	3

Таблица 4.3.2

Описание критерия	Комментарии	Балл
Фотоприемник работает в линейном (ненасыщенном) режиме; бОльшая часть активных пикселей не засвечена	В зависимости от используемого в схеме элемента	3
Сопряжение оптических элементов выполнено эффективно (нет потерь, связанных с плохой юстировкой/настройкой)		4
Элементы схемы надежно закреплены, нет риска непреднамеренного сдвига элементов при эксплуатации изделия		2
Отсутствуют критические изгибы волокна		2
Оптические элементы не повреждены, не загрязнены	С момента приемки стенда командой	1
Провода смотаны и не мешают эксплуатации системы		1
Обеспечена эргономичность и удобство доступа к настроечным/юстировочным/ подключаемым элементам		1
Выполнены требования ТБ при работе с лазерным излучением	Оценивается в ходе выполнения модуля	2
Соблюдены чистота и порядок на рабочем месте (нет мусора, не разбросаны инструменты и т. д.)		1
Максимальный балл за модуль B		**29**
Модуль C. Обработка данных		
Программный код содержит не менее трех разных тестов на случайность числовой последовательности		2
Взаимодействие с программным кодом организовано согласно требованиям технического задания	Программа принимает на вход числовую последовательность и выводит для каждого теста: • название теста; • определяемый в тесте параметр, значение параметра; • вердикт	2
Все размерные параметры, выводимые в результате работы программы, снабжены единицами измерения		2
Код легко читаем	Код сопровождается комментариями, объясняющими работу функций и значение переменных; названия функций и переменных соответствуют их смысловой нагрузке	3
Функциональная схема полностью соответствует программному коду	Функциональная схема оформляется отдельным файлом в формате `pdf`	3
Программа одинаково хорошо работает на эталонных и экспериментальных данных		3

Таблица 4.3.2

Описание критерия	Комментарии	Балл
Составлен и отлажен алгоритм, принимающий решение о случайности последовательности на основе совокупности данных о прохождении тестов		2
Максимальный балл за модуль C		**17**
Модуль D. Подготовка отчета и защита решения		
Отчет оформлен согласно требованиям технического задания	• Шрифт: Times New Roman 14 pt, заголовки — 16 pt, выделены жирным; подзаголовки — 16 pt, без выделения; цвет текста — черный; • все рисунки, таблицы, схемы пронумерованы и подписаны; • все формулы пронумерованы; • в отчете наличествует титульный лист с указанием названия готового устройства, названия команды, перечислением участников команды с указанием их ролей, датой и местом выполнения работы; • в отчете присутствуют ссылки на источники информации, отсутствуют явные заимствования	2
В отчете детально раскрыт физический принцип устройства		4
В отчете приводится подробное обоснование выбранных программных тестов		4
Приведено обоснование алгоритма, принимающего решение о случайности последовательности на основе совокупности данных о прохождении тестов	Выполнены условия нормировки везде, где это требуется	1
	Алгоритм учитывает прохождение всех тестов	1
	Выбор решающего правила (порога, условия) корректно обоснован	2
	Поведение алгоритма вблизи экстремальных случаев корректно обосновано	4
Все используемые при разработке устройства и/или обработке данных приближения в отчете обоснованы физически и/или математически		3
В отчете отражены результаты обработки эталонных и экспериментальных данных		1
В отчете все размерные величины снабжены единицами измерения		2
Отчет содержит инструкцию по работе с готовым устройством и с программным кодом для конечного пользователя		1
В презентации и устном рассказе раскрыты основные принципы работы устройства		2

Таблица 4.3.2

Описание критерия	**Комментарии**	**Балл**
В презентации и устном рассказе отмечены особые преимущества решения команды		2
Общее качество представления итоговой презентации (не более 5 мин)	Сбивчивый, непоследовательный рассказ	0
	Логика прослеживается, но общая картина не формируется	1
	Уверенное представление, четкая логика, но графический материал презентации не соответствует рассказу	2
	Графический материал и устный рассказ создают полную, непротиворечивую картину	3
Качество ответа на вопросы (не более пяти вопросов одной команде); вопросы могут задаваться адресно конкретному участнику, согласно его роли в команде	Отвечает на все вопросы неправильно	0
	Ответ в целом верный, но отвечает неуверенно, без достаточной аргументации (ни на один вопрос не ответил хорошо)	1
	Корректный ответ, с незначительными помарками и на большинство вопросов	3
	Подробный развернутый ответ с полноценной и уверенной аргументацией на все вопросы	6
Максимальный балл за модуль D		38
Максимальный балл за все модули		100

4.3.7. Решение задачи

Разработка и сборка оптической схемы

Набор оборудования, предоставленный участникам для выполнения задачи, позволяет реализовать несколько конфигураций квантово-оптического генератора случайных чисел. В данном разборе рассмотрены два основных варианта решения.

Решение 1: использование фотодетектора

Для реализации этого метода необходимо собрать схему интерферометра (пример представлен на рис. 4.3.1).

На осциллографе, подключенном к выходу фотодетектора, наблюдается интерференционная картина в виде сигналов типа «меандр». Интерференция лазерных импульсов проявляется на плато отдельных пиков сигнала.

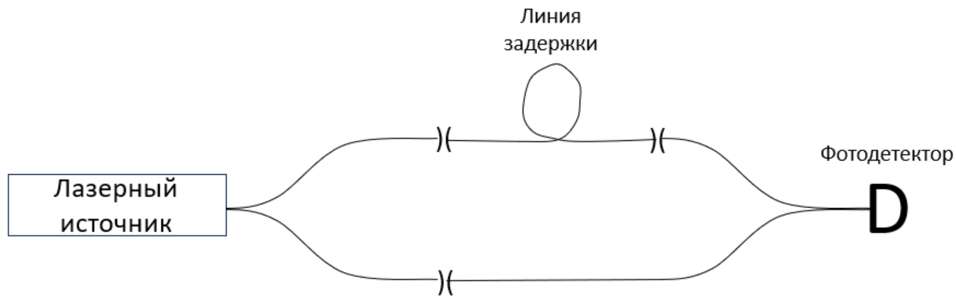


Рис. 4.3.1. Схема интерферометра для генерации случайных чисел

Оптическая система крайне чувствительна к внешним воздействиям (колебания температуры, вибрации и изменения оптического тракта), поэтому результат интерференции носит случайный характер. Для генерации случайных чисел можно анализировать отклонения площади наблюдаемых импульсов от среднего значения. Дополнительное внесение непериодических возмущений в схему повышает степень случайности сигнала.

Решение 2: использование видеокамеры

При распространении лазерного излучения в рассеивающей среде возникает спекл-картина — случайное распределение ярких и темных пятен, образующихся в результате интерференции рассеянных световых волн. Поскольку условия распространения света динамически изменяются (из-за флуктуаций температуры, вибраций и других факторов), спекл-картина также меняется случайным образом во времени.

Для наблюдения спекл-картины достаточно разместить перед выходом из лазерного источника рассеивающий объект (например, лист бумаги) и зарегистрировать полученное изображение с помощью видеокамеры.

Если вносить непериодические изменения в положение рассеивателя, можно получить последовательность кадров со случайным распределением спеклов. Случайность может быть извлечена путем сравнения интенсивности различных участков спекл-картины со средним значением в локальной области, анализа изменений яркости отдельных пикселей между кадрами.

Для увеличения степени случайности можно добавить многомодовое оптическое волокно, в котором происходят случайные процессы интерференции из-за динамически меняющихся внешних условий. Помимо этого можно включить в схему интерферометр (как в решении № 1), что дополнительно усилит стохастичность спекл-картины.

Программный код для тестирования случайности

Проверка случайности последовательности — сложная задача, требующая применения специализированных статистических методов. Одним из наиболее авторитетных инструментов для такой оценки является NIST Statistical Test Suite (пакет тестов Национального института стандартов и технологий США).

Для решения задачи достаточно реализовать три теста из набора NIST, например:

- Частотный побитовый тест — проверяет равномерность распределения битов (0 и 1).
- Частотный блочный тест — анализирует распределение частот битов в подпоследовательностях.
- Тест на последовательность одинаковых битов (Runs Test) — оценивает случайность чередований нулей и единиц.

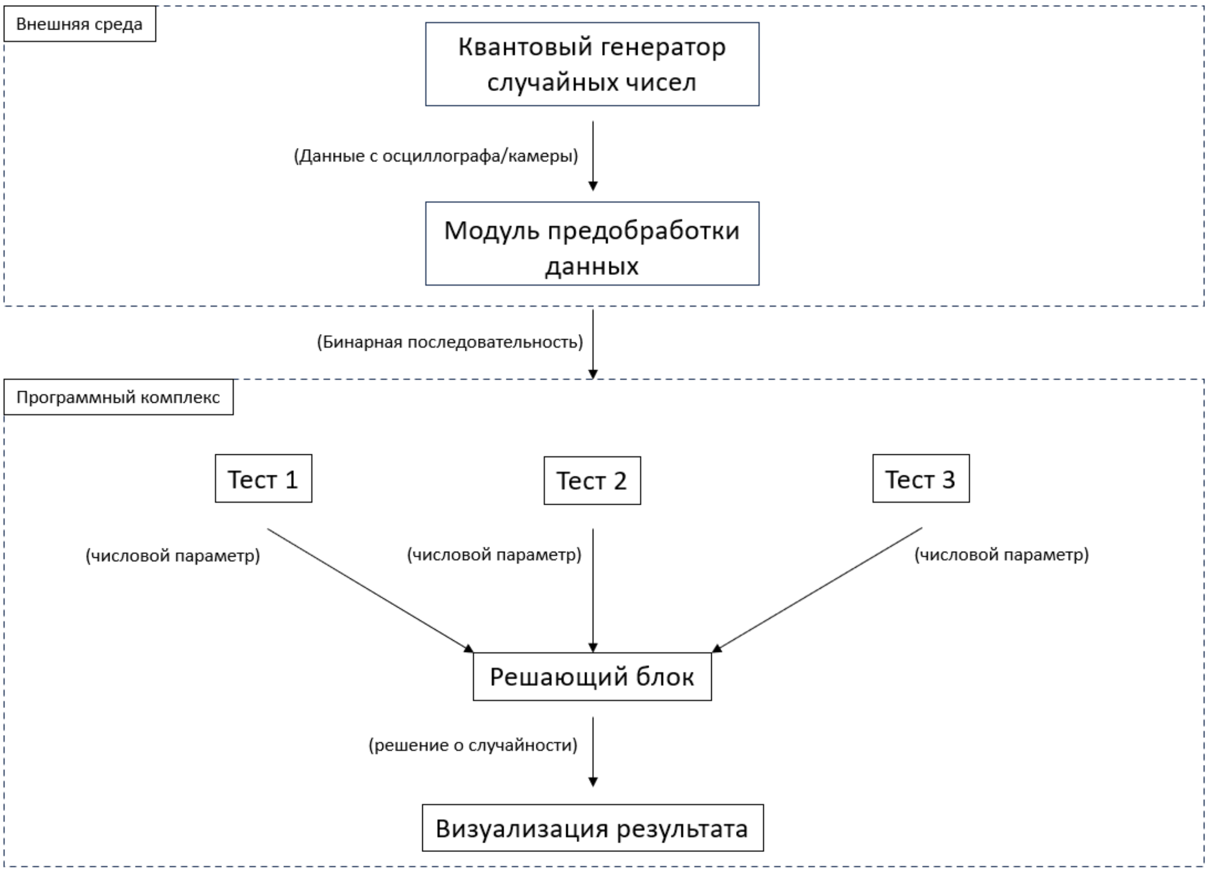


Рис. 4.3.2. Функциональная схема

Помимо этого необходимо реализовать алгоритм, интерпретирующий результаты прохождения тестов. В качестве примеров можно привести два подхода к реализации подобного алгоритма:

1. Аналитический метод:
   - Получить числовые показатели каждого теста (например, p-value).
   - При необходимости нормировать значения (например, привести к единой шкале).
   - Ввести функцию принятия решения (например, линейную комбинацию параметров).
   - Сравнить результат с пороговым значением и сделать вывод о случайности.
2. Логический метод:
   - Определить, какие комбинации прохождения/непрохождения тестов допустимы.

- Построить таблицу истинности.
- Определить, является ли последовательность случайной на основе таблицы.

Функциональная схема программы представлена на рис. 4.3.2.

Формирование отчета

По результатам работы необходимо подготовить развернутый отчет, который должен содержать все этапы реализации проекта — от теоретического обоснования до практических результатов. В нем следует детально описать физические принципы работы разработанного устройства. Например, для интерферометра необходимо привести уравнения интерференции и объяснить, как внешние воздействия влияют на случайность сигнала, тогда как для спекл-метода важно описать процессы формирования спекл-картин и их стохастическую природу.

Особое внимание нужно уделить обоснованию выбранных технических решений, подробно описав схему установки с указанием ключевых компонентов. В разделе, посвященном программному обеспечению, требуется представить алгоритмы обработки данных, включая методы извлечения случайных битов и реализацию статистических тестов NIST, с обязательным указанием критериев оценки случайности последовательностей и обоснованием выбора именно тех или иных тестов.

Результаты работы должны быть подкреплены конкретными данными:

- значениями p-value для каждого теста,
- графиками интерференционных сигналов или спекл-структур,
- гистограммами распределения битов.

В заключении необходимо проанализировать эффективность предложенного решения, отметить его преимущества и возможные направления для дальнейшего совершенствования.

Выступление должно четко и логично раскрывать все аспекты работы: от физических основ до особенностей программной реализации. Важно уместить доклад в отведенное время, делая акцент на ключевых моментах и используя наглядные материалы — схемы, графики, примеры данных.

Особое значение имеет глубина понимания темы: необходимо быть готовым к вопросам о выборе конкретной аппаратной схемы, параметрах тестирования, ограничениях метода и путях их преодоления. Успешная презентация предполагает не только демонстрацию работоспособности решения, но и убедительное обоснование всех принятых технических решений.

4.3.8. Материалы для подготовки

1. Основы статистики (Электронный ресурс): онлайн-курс / Stepik. — URL: https://stepik.org/course/76/promo.
2. Программирование на Python (Электронный ресурс): онлайн-курс для начинающих / Stepik. — URL: https://stepik.org/course/67/promo.

3. Статистика и теория вероятностей для 9 класса (Электронный ресурс): онлайн-курс / Stepik. — URL: https://stepik.org/course/68669/promo.
4. Обработка данных с помощью пакета Pandas (Электронный ресурс): онлайн-курс / Stepik. — URL: https://stepik.org/course/83990/promo.
5. Оптика для школьников (Электронный ресурс): онлайн-курс / Stepik. — URL: https://stepik.org/course/85243/promo.

5. Критерии определения победителей и призеров

Первый отборочный этап

В первом отборочном этапе участники решали задачи предметного тура по двум предметам: физике и информатике и инженерного тура. В каждом предмете максимально можно было набрать 100 баллов, в инженерном туре 100 баллов. Для того чтобы пройти во второй этап, участники должны были набрать в сумме по обоим предметам и инженерному туру не менее 40,0 баллов, независимо от уровня.

Второй отборочный этап

Количество баллов, набранных при решении всех задач второго отборочного этапа, суммируется. Победители второго отборочного этапа должны были набрать не менее 81,0 балла, независимо от уровня.

Заключительный этап

Индивидуальный предметный тур

- физика — максимально возможный балл за все задачи — 100 баллов;
- информатика — максимально возможный балл за все задачи — 100 баллов.

Командный инженерный тур

Команды заключительного этапа получали за командный инженерный тур от 0 до 100,00 баллов: команда, набравшая наибольшее число баллов среди других команд, становилась командой-победителем.

Все результаты команд нормировались по формуле:

$$\frac{100 \times x}{MAX},$$

где x — число баллов, набранных командой,

MAX — число баллов, максимально возможное за инженерный тур.

В заключительном этапе олимпиады индивидуальные баллы участника складываются из двух частей, каждая из которых имеет собственный вес: баллы за индивидуальное решение задач по предмету 1 (физика) с весом $K_1 = 0{,}2$, по предмету 2 (информатика) с весом $K_2 = 0{,}1$, баллы за командное решение задач инженерного тура с весом $K_3 = 0{,}7$.

Итоговый балл определяется по формуле:

$$S = K_1 \cdot S_1 + K_2 \cdot S_2 + K_3 \cdot S_3,$$

где S_1 — балл первой части заключительного этапа по физике (предметный тур) ($S_{1\text{ макс}} = 100$);

S_2 — балл первой части заключительного этапа по информатике (предметный тур) ($S_{2\text{ макс}} = 100$);

S_3 — итоговый балл инженерного командного тура ($S_{3\text{ макс}} = 100$).

Итого максимально возможный индивидуальный балл участника заключительного этапа — 100 баллов.

Критерий определения победителей и призеров

Чтобы определить победителей и призеров (независимо от класса) на основе индивидуальных результатов участников, был сформирован общий рейтинг всех участников заключительного этапа. С начала рейтинга были выбраны 4 победителя и 8 призеров (первые 25% участников рейтинга становятся победителями или призерами, из них первые 8% становятся победителями, оставшиеся — призерами).

Критерий определения победителей и призеров (независимо от уровня)

Категория	**Количество баллов**
Победители	52,30 и выше
Призеры	От 46,50 до 52,10

6. Работа наставника после НТО

Участие школьника в Олимпиаде может завершиться после любого из этапов: первого или второго отборочных, либо после заключительного этапа. В каждом случае после завершения участия наставнику необходимо провести с учениками рефлексию — обсудить полученный опыт и проанализировать, что позволило достичь успеха, а что привело к неудаче. Подробные материалы о проведении рефлексии представлены в курсе «Наставник НТО»: https://academy.sk.ru/events/310.

Наставнику важно проинформировать руководство образовательного учреждения, если его учащиеся стали финалистами, призерами и победителями. Публичное признание высоких результатов дополнительно повышает мотивацию.

В процессе рефлексии с учениками, не ставшими призерами или победителями, рекомендуется уделить особое внимание особенностям командной работы: распределению ролей, планированию работы, возникающим проблемам. Для этого могут использоваться опросники для самооценки собственной работы и взаимной оценки участниками других членов команды (P2P). Они могут выявить внутренние проблемы команды, для решения которых в план подготовки можно добавить мероприятия, направленные на ее сплочение.

Стоит рассказать, что в истории НТО было много примеров, когда не победив в первый раз, на следующий год участники показывали впечатляющие результаты, одержав победу сразу в нескольких профилях. Конечно, важно отметить, что так происходит только при учете прошлых ошибок и подготовке к Олимпиаде в течение года.

Важным фактором успешного участия в следующих сезонах НТО может стать поддержка родителей учеников. Знакомство с ними помогает наставнику продемонстрировать важность компетенций, развиваемых в процессе участия в НТО, для будущего образования и карьеры школьников. Поддержка родителей помогает мотивировать участников и позволяет выделить необходимое время на занятия в кружке.

С участниками-выпускниками наставнику рекомендуется обсудить их дальнейшее профессиональное развитие и его связь с выбранными профилями НТО. Отдельно можно обратить внимание на льготы для победителей и призеров, предлагаемые в вузах с интересующими ученика направлениями. Кроме того, ряд вузов предлагает льготы для всех финалистов НТО, а также учитывает результаты Конкурса цифровых портфолио «Талант НТО».